Oberlin College Library
MAY 13 1946
Oberlin Coll.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon
vereinigt mit dem
Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik
begründet von Johannes Stark
herausgegeben von Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye
unter Mitwirkung der
Physikalisch-Technischen Reichsanstalt
Schriftleitung: Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin-Dahlem

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für RM 18.30 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis RM 18.80 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikal. Gesellschaft im Inland RM 12.30, im Ausland RM 12.80. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen und Beilagen werden nach Tarif berechnet. Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin-Dahlem, Boltzmannstraße 20, Kaiser Wilhelm-Institut für Physik, zu senden. — Bücher-sendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 21/22 | Ausgegeben im Dezember 1943 Nr. 1129/30. Printed in Germany | 44. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

S. Flügge, Über die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen. S. 445—455.

H. Richter, Die Natur der verwaschenen Interferenzen bei polierten Metallen. Mit Tafel XXXIV. S. 456—460.

Berichte:

E. Bagge, Die Kernzertrümmerungen durch die kosmische Strahlung. Mit Tafel XXXV und XXXVI. S. 461—468.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^{h}\,40^{min}$ für Oktober 1943. S. 468.

Nachrichten: S. 468.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Republication to complete this periodical formerly reproduced
and distributed in the public interest by
United States Office of Alien Property Custodian

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT
vereinigt mit dem
JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 21/22 — 1. Dezember 1943 — 44. Jahrgang
Redaktionsschluß für Nr. 23 am 1. Dezember 1943

INHALT:

Abhandlungen:
S. Flügge, Über die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen, S. 445.
H. Richter, Die Natur der verwaschenen Interferenzen bei polierten Metallen. Mit Tafel XXXIV. S. 456.
A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich 10h 40min für Oktober 1943. S. 468.
Berichte:
E. Bagge, Die Kernzertrümmerungen durch die kosmische Strahlung. Mit Tafel XXXV und XXXVI. S. 461.
Nachrichten: S. 468.

ABHANDLUNGEN

Über die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen

Von S. Flügge

Mitteilung aus dem Amt für physikalische Sonderfragen der Forschungsanstalt der Deutschen Reichspost

Es wird eine Näherungsmethode entwickelt, bei der durch Betrachtung von „gleichaltrigen" Neutronen das Bremsproblem künstlich nichtstationär gemacht wird. Die Methode wird auf die wichtigsten praktischen Fälle angewandt (Punktquelle, Verteilung überthermischer und thermischer Neutronen).

1. Einleitung

Die Abbremsung der von einer Quelle ausgehenden schnellen Neutronen ist seit Fermis Entdeckung der großen Wichtigkeit dieses Vorganges für die experimentelle Kernphysik der Gegenstand zahlreicher Abhandlungen geworden[1]). Hierbei gelang für zwei Teile der Fragestellung eine einigermaßen befriedigende Beantwortung. Es konnte erstens etwas über die Bremsung der Neutronen in einem unendlich ausgedehnten, homogenen Bremsmittel ohne Berücksichtigung ihrer räumlichen Verteilung ausgesagt werden, und zweitens ließ sich das Problem der Diffusionsvorgänge im thermischen Gebiet abtrennen und behandeln, d. h. das Problem der räumlichen Verteilung nach Abschluß des eigentlichen Bremsprozesses. Die wichtige Frage dagegen nach der räumlichen Verteilung der Neutronen in jenen Energiebereichen, in denen der Bremsprozeß abläuft, konnte bisher nicht befriedigend beantwortet werden. Der Grund dafür ist leicht einzusehen: Die üblichen Betrachtungen der klassischen Diffusionstheorie versagen hier, da sich nach jedem Zusammenstoß die Energie der Neutronen ändert, diese also immer wieder eine neue Kategorie bilden. Der Versuch andererseits, durch statistische Aneinanderreihung der Einzelprozesse zum Ziele zu gelangen, ist mathematisch schwierig. Der Verfasser[2]) hat vor Jahren versucht, auf diesem Wege eine strenge Lösung des Problems zu gewinnen, doch kann auch diese Arbeit nicht den Anspruch stellen, mehr zu sein als eine Studie des Problems, da zur mathematischen Bewältigung zwei Annahmen eingeführt werden mußten, nämlich die Unabhängigkeit der freien Weglänge von der Energie und die Gleichberechtigung aller Richtungen nach einem Stoß, von denen namentlich die erste zu schlecht zu den physikalischen Tatsachen paßt, als daß man schon praktischen Nutzen aus dieser Betrachtung ziehen könnte. Mit anderen Worten: Da die strenge Lösung des Problems zu weitläufig ist, besteht die Notwendigkeit, sich nach einem Näherungsverfahren umzusehen, das einerseits einfach genug ist, um noch bewältigt zu werden, und andererseits genau genug, um von praktischem Nutzen zu sein, d. h. rechnerische Vorhersagen zu gestatten.

Der Verfasser hat nun kürzlich in Anlehnung an eine Arbeit von Bethe, Korff und Placzek[3]) ein Verfahren ausgearbeitet, um die Verteilung langsamer Neutronen zu berechnen, welche von der Höhenstrahlung in der Atmosphäre ausgelöst werden. Das dort entwickelte Verfahren[4]) soll in dieser Arbeit mit einer allerdings nicht unwesentlichen Erweiterung auf die normalen Fragestellungen der Neutronenphysik des Laboratoriums übertragen werden.

1) Vgl. etwa die grundlegende Arbeit von E. Amaldi und E. Fermi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936, sowie den Bericht von H. A. Bethe, Rev. mod. Phys. **9**, 69, 1937, insbesondere § 59.

2) S. Flügge, Zeitschr. f. Phys. **111**, 109, 1938.

3) H. A. Bethe, S. A. Korff und G. Placzek, Phys. Rev. **57**, 573, 1940.

4) In: Heisenberg, Kosmische Strahlung, S. 132ff. (im Erscheinen).

2. Vorläufige Formulierung der Methode

Der Grundgedanke unseres Verfahrens ist der folgende: Wir betrachten eine größere Anzahl Neutronen, die alle genau gleich alt sind, d. h. im gleichen Zeitpunkt $t = 0$ — und zwar mit der einheitlichen Anfangsenergie E_0 — von der Neutronenquelle emittiert werden. Diese Neutronen verändern mit der Zeit sowohl ihren Ort als ihre Energie. Der Zusammenhang von Zeit (d. h. Lebensalter) und Energie läßt sich folgendermaßen erfassen: Bei jedem elastischen Stoß nimmt die Energie E des Neutrons im Mittel um den Betrag

$$\Delta E = -\frac{2E}{M+1}$$

ab, wenn M die Masse des gestoßenen Kernes in Einheiten der Neutronenmasse ist[5]). Bedeutet also ν die Zahl der Stöße seit Entstehung des Neutrons, so wird durch

$$\frac{dE}{d\nu} = -\frac{2E}{M+1} \tag{1}$$

ein Zusammenhang zwischen Energie und Stoßzahl festgelegt, der zwar nur statistisch im Mittel zutrifft, in unserem Verfahren aber als streng für jedes einzelne Neutron gültig angenommen wird. Gleichung (1) ist dann eine Differentialgleichung, deren Integration ergibt

$$\nu = \frac{M+1}{2} \ln \frac{E_0}{E}. \tag{2}$$

Ist nun λ_s die freie Weglänge eines Neutrons zwischen zwei elastischen Stößen, so hängt die Stoßzahl ν mit dem Alter t zusammen durch die Beziehung

$$d\nu = \frac{v}{\lambda_s}\, dt. \tag{3}$$

Aus Gleichung (1) und (3) kann man dann die Stoßzahl ganz eliminieren und erhält

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{v}{\lambda_s}\frac{2E}{M+1}. \tag{4}$$

Da nun v und λ_s bekannte Funktionen der Energie sind, kann diese Gleichung integriert werden zu

$$t = \frac{M+1}{2}\int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{v}\frac{dE}{E}, \tag{5}$$

d. h. wir können unmittelbar einen Zusammenhang zwischen Lebensalter und Energie eines Neutrons angeben.

5) Eigentlich: $\Delta E/E = -\left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\right)$ mit $\alpha = \left(\frac{M-1}{M+1}\right)^2$. Das gibt für $M \gg 1$: $\Delta E/E = -2/M$ und für $M = 1$: $\Delta E/E = -1$. Unsere Formel enthält diese beiden Grenzfälle.

Wir legen unseren Betrachtungen nun die Diffusionsgleichung zugrunde:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} \varrho) - \frac{1}{\tau}\varrho. \tag{6}$$

Darin ist ϱ die Neutronendichte am Ort x, y, z zur Zeit t, d. h. also die Dichte derjenigen Neutronen, welche das Alter t und somit nach Gleichung (5) die Energie E haben. ϱ ist demnach gerade die Größe, deren Berechnung unser Ziel ist. In Gleichung (6) treten außerdem auf: die Diffusionskonstante

$$D = \frac{1}{3}\lambda_s v \tag{7}$$

und die mittlere Lebensdauer

$$\tau = \frac{\lambda_a}{v} \tag{8}$$

(λ_a = freie Weglänge für Absorption, falls keine elastischen Stöße stattfänden), die beide bekannte Funktionen der Energie und damit wiederum nach Gleichung (5) der Zeit, d. h. des Lebensalters, sind. An Stelle des stationären Problems, bei dem die Neutronenquelle dauernd Neutronen emittiert, setzen wir also das nichtstationäre Problem, das Lebensschicksal eines einmalig von der Neutronenquelle ausgesandten „Schauers" zu untersuchen. Dabei können wir in der zugrunde zu legenden Differentialgleichung (6) auf Grund von Gleichung (4) die Zeit eliminieren und schreiben:

$$-\frac{v}{\lambda_s}\frac{2E}{M+1}\frac{\partial \varrho}{\partial E} = \frac{1}{3}\lambda_s v\, \Delta\varrho - \frac{v}{\lambda_a}\varrho$$

oder

$$-\frac{6E}{(M+1)\lambda_s^2}\frac{\partial \varrho}{\partial E} = \Delta\varrho - \frac{3}{\lambda_s \lambda_a}\varrho.$$

Es empfiehlt sich aus Gründen der rechnerischen Einfachheit an Stelle von E noch die Hilfsvariable

$$s = \frac{M+1}{2}\int_E^{E_0} \lambda_s^2 \frac{dE}{E} \tag{9}$$

einzuführen, die unter Benutzung der Stoßzahl ν auch

$$s = \frac{1}{3}\int_0^{\nu} \lambda_s^2\, d\nu \tag{10}$$

geschrieben werden kann. Sie hat eine anschauliche Bedeutung: s ist das Quadrat der „Bremslänge", d. h. jener Entfernung, die das Neutron durchschnittlich überwindet, während es von der Anfangsenergie E_0 bis auf die Energie E

abgebremst wird. Durch diese Substitution geht unsere Differentialgleichung schließlich über in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} = \Delta \varrho - \frac{1}{l(s)^2}\varrho . \tag{11}$$

Die Größe

$$l(s) = \sqrt{\frac{\lambda_s \lambda_a}{3}} \tag{12}$$

tritt nur dann auf, wenn während des Bremsprozesses eine merkliche Absorption von Neutronen stattfindet; sie gibt dann diejenige Strecke an, die das Neutron durchschnittlich zurücklegt, bis es absorbiert wird. Wir wollen diese Größe im folgenden als „mittleren Lebensweg" bezeichnen[6]; für die Bremsung an Wasserstoff ist $\lambda_a = \infty$, da die Absorption erst nach Abschluß des Bremsprozesses bei Erreichung des thermischen Gebiets merkbar einsetzt, für das unsere Methode ohnehin nicht mehr gilt. Dann tritt an Stelle von Gleichung (11) die einfache

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} = \Delta \varrho . \tag{11'}$$

Die Gleichung (11') hat den Bau der gewöhnlichen Diffusionsgleichung, so daß sich alle Methoden der klassischen Diffusions- und Wärmeleitungstheorie darauf anwenden lassen.

3. Durchführung für ein unendlich ausgedehntes, homogenes Medium

Wir lassen zunächst einmal die Frage der Ortsabhängigkeit beiseite und fragen nach der Zahl der Neutronen, die sich insgesamt im Energieintervall zwischen E und $E + dE$ in einem unendlich ausgedehnten und homogenen Medium befinden. Es handelt sich also um die Normierungsfrage, die uns gestattet, den Anschluß an den wirklichen stationären Vorgang wiederzufinden.

Die Neutronenquelle (über deren räumliche Verteilung nichts vorausgesetzt wird) möge in jedem Zeitintervall dt insgesamt $Q \cdot dt$ schnelle Neutronen der einheitlichen Anfangsenergie E_0 emittieren. Dann werden zu jeder Zeit eine bestimmte Menge von Neutronen sich im Energieintervall zwischen E und $E + dE$ befinden. Diese Neutronen besitzen nach Gleichung (4) und (5) ein fast einheitliches Lebensalter; sie haben eine Lebenszeit hinter sich, die zwischen t und $t + dt$ liegt, wobei $dt = \frac{\lambda_s}{v}\frac{M+1}{2E}dE$ ist.

Falls während des Bremsvorganges keine Absorption eingetreten ist, d. h. also kein Neutron verlorengegangen ist, muß die Zahl der Neutronen zwischen E und $E + dE$, $N(E)\,dE$ im stationären Betrieb übereinstimmen mit der Zahl schneller Neutronen, welche die Quelle während des angegebenen Zeitintervalls dt emittiert hat, d. h. es muß sein

$$N(E)\,dE = Q\,dt , \text{ wobei } dt = \frac{\lambda_s}{v}\frac{M+1}{2E}dE .$$

Es gilt also die Normierungsrelation

$$N(E)\,dE = Q(M+1)\lambda_s \frac{dv}{v^2} . \tag{13}$$

Das ist das wohlbekannte Fermische Gesetz für das Energiespektrum abgebremster Neutronen, sofern keine Absorption eintritt.

Berücksichtigen wir die Absorption, so kommen wir sehr schnell zum Ziele, wenn wir die Differentialgleichung (11) über den ganzen Raum integrieren. Dann verschwindet nach dem Gaußschen Satz das Glied mit dem Δ-Operator, und es entsteht mit der Abkürzung $\int \varrho\, dV = n$ einfach

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{1}{l(s)^2}n .$$

Bei vorhandener Absorption folgt durch Integration sofort das Auftreten des Exponentialfaktors $e^{-\int ds/l(s)^2}$, der ausführlich geschrieben nach Gleichung (9) und (12) lautet

$$\exp\left\{-\frac{M+1}{2}\int_E^{E_0}\frac{\lambda_s}{\lambda_a}\frac{dE}{E}\right\}. \tag{14}$$

Dieser Faktor wäre der Fermischen Spektralfunktion noch anzufügen im Falle der Absorption. Er entspricht genau einer bereits früher von Placzek berechneten Formel.

Wir wenden uns nun der Frage der räumlichen Verteilung zu, gehen also an die Integration von Gleichung (11). Durch die Substitution

$$\varrho(x, y, z, s) = e^{-\int ds/l(s)^2} f(x, y, z, s)$$

geht die Differentialgleichung (11) in die einfachere Gleichung (11') für die Funktion f über. Die Absorption hat also keinen Einfluß auf die räumliche Verteilung, sondern äußert sich lediglich in einem Normierungsfaktor.

Die Funktion f können wir mit Hilfe der bekannten Verfahren der klassischen Diffusionstheorie angeben. Sie läßt sich z. B. in einer unserer Fragestellung angepaßten Form quellenmäßig aufbauen durch das Integral

$$f(x, y, z, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 \, \frac{C(x_0 y_0 z_0)}{s^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4s}} \tag{15}$$

6) Sie ist völlig analog gebildet zu der für thermische Neutronen eingeführten „Diffusionslänge"; der andere Name wird vorgeschlagen, um Verwechslungen vorzubeugen.

Die Normierungsfunktion C kann man am einfachsten bestimmen, indem man f über x, y, z integriert; dann muß gerade $N(E)\,dE$ entstehen, vorausgesetzt, daß wir unter ϱ die Dichte der Neutronen im Energieintervall dE verstehen. Es ist

$$\int dx \int dy \int dz f(x, y, z, s) = 8\pi^{3/2} \int dx_0 \int dy_0 \int dz_0 C(x_0 y_0 z_0) .$$

Dieser Ausdruck muß mit dem von Gleichung (13) gerade übereinstimmen, wobei es noch sinnvoll ist, die Gesamtquellstärke Q in der Form

$$Q = \int dx_0 \int dy_0 \int dz_0 q(x_0 y_0 z_0)$$

aus der „Quelldichte" q aufzubauen. Wir kommen dann schließlich zu der Formel

$$\varrho(x y z s) = \frac{(M+1)}{8\pi^{3/2}} \lambda_s \frac{dv}{v^2} e^{-\frac{M+1}{2} \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\lambda_a} \frac{dE}{E}} s^{-\frac{3}{2}} \int dx_0 \int dy_0 \int dz_0 q(x_0 y_0 z_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4s}} \tag{16}$$

4. Punktquelle im unendlich ausgedehnten, homogenen Medium

Bei den meisten Versuchen mit verlangsamten Neutronen benutzt man als Quelle ein radioaktives Präparat oder den Auffänger einer Ionenbeschleunigungsanlage, d. h. also eine Neutronenquelle von relativ geringer räumlicher Ausdehnung. Es ist daher der Grenzfall einer punktförmigen Neutronenquelle auch experimentell von besonderem Interesse.

Für eine solche Punktquelle im Koordinatenursprung folgt aus Gleichung (15) und (16) als Lösung

$$\varrho = A s^{-3/2} e^{-r^2/4s} \tag{17}$$

mit der Abkürzung

$$A = Q \frac{M+1}{8\pi^{3/2}} \lambda_s \frac{dv}{v^2} \exp\left\{-\frac{M+1}{2} \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\lambda_a} \frac{dE}{E}\right\}. \tag{18}$$

Die Größe A ist für die folgenden Betrachtungen unwesentlich. Die Dichte fällt mit wachsendem Abstand r von der Quelle für jede Energie (d. h. für jedes s) ab wie eine Glockenkurve, deren Breite von der Ordnung $\sqrt{s}$ ist. Führt man mit Fermi und Amaldi die Zahl aller Neutronen einer bestimmten Energie zwischen den Entfernungen r und $r + dr$ ein, also die Größe $4\pi r^2 \varrho$, so besitzt diese ein Maximum an der Stelle $r_m = 2\sqrt{s}$.

Wenn auch in dieser Formel eine Reihe von Zügen des wirklichen Verhaltens bereits gut zum Ausdruck kommt, so lehrt ein qualitativer Vergleich doch sofort, daß sie noch einen grundsätzlichen Fehler enthält. Für große Abstände von der Quelle ergibt sich nämlich in Wirklichkeit asymptotisch ein exponentieller Abfall $\varrho r^2 \sim e^{-r/\lambda_0}$. Das ist auch leicht verständlich. Faßt man nämlich die von der Quelle ausgehenden Neutronen, die noch keinen Stoß erlitten haben, als Primärstrahlung auf, alle abgebremsten Neutronen aber als Sekundärstrahlung, so muß sich nach Zurücklegung einer gewissen Wegstrecke ein Gleichgewicht zwischen Primär- und Sekundärstrahlung ausbilden, genau so wie dies etwa für die Kaskadenbildung oder die Begleitelektronen beim Durchgang der Höhenstrahlung durch die Atmosphäre der Fall ist. Das gilt, sofern die Reichweite der Primärstrahlen größer ist als die der sekundären. Diese Forderung ist für Neutronen tatsächlich erfüllt wegen der beträchtlichen Zunahme des Streuquerschnitts mit abnehmender Energie. Asymptotisch muß also für die verlangsamten Neutronen der gleiche Abfall vorliegen wie für die primären, d. h. eben, es muß $\varrho r^2 \sim e^{-r/\lambda_0}$ sein, wobei λ_0 die freie Weglänge für Streuung der Primärneutronen bedeutet.

Der hier erläuterte Sachverhalt hat übrigens eine wichtige praktische Folge: Umgibt man zur Herstellung langsamer Neutronen die Quelle mit einem Paraffin- oder Wassermantel, so erhält man mit wachsender Dicke des Mantels zunächst ein Ansteigen der Intensität langsamer Neutronen. Diese geht aber durch ein Maximum; nach Ausbildung des Gleichgewichts zwischen schnellen und langsamen Neutronen bedeutet eine weitere Verstärkung des Mantels nur noch eine Schwächung der Intensität für beide Komponenten im gleichen Maße. Man kann eben niemals langsame Neutronen allein herstellen, ohne daß noch schnelle zugegen sind.

Unsere Gleichung (17) zeigt asymptotisch ein so gänzlich falsches Verhalten, weil die Benutzung der Diffusionstheorie für die Behandlung unseres Problems, bei dem sich von Stoß zu Stoß noch so viel ändert, eine unzureichende Näherung ist. Denn während in Wahrheit die Zahl der Stöße gequantelt ist, haben wir ν als kontinuierlich veränderliche Größe eingeführt. Dies ist gewiß erlaubt, wenn die Zahl der Stöße $\nu \gg 1$ ist; der dadurch bedingte Fehler wird

aber um so größer, je näher wir uns am Anfang des ganzen Geschehens befinden. Gerade die Berücksichtigung der allerersten Stöße wird daher bei unserem Verfahren noch mangelhaft sein. Wir können von dieser Erkenntnis aus nun aber leicht zu einer konsequenten Verbesserung des Verfahrens fortschreiten, wenn wir die geschilderte Abtrennung des ersten Stoßes in unser Rechenverfahren aufnehmen. Wir betrachten nämlich als „Geburtsakt" der Neutronen nicht mehr ihre Emission aus der Punktquelle, sondern statt dessen den ersten Stoß im Bremsmaterial. Wir haben dann eine räumlich verteilte Quelle der Quellstärke

$$q(r_0) = \frac{Q\, e^{-r_0/\lambda_0}}{4\pi\lambda_0 r_0^2} \tag{19}$$

in unsere Gleichung (16) einzuführen, wobei λ_0 die freie Weglänge der wirklichen Primärneutronen aus der Punktquelle ist, für die Berechnung von s jedoch die Energie im Augenblick des Geburtsaktes, d. h.

$$E_0' = \left[1 - \frac{2M}{(M+1)^2}\right] E_0 \tag{20}$$

einzusetzen ist. Es wird also mit der Abkürzung von Gleichung (18):

$$\varrho = A\, s^{-3/2} \int dV_0 \frac{e^{-r_0/\lambda_0}}{4\pi\lambda_0 r_0^2}\, e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4s}} \tag{21}$$

die Lösung unseres Problems. Die Aufgabe ist damit auf eine Quadratur zurückgeführt, der wir uns jetzt zuwenden wollen.

Ausführlich geschrieben lautet Gleichung (21)

$$\varrho = A\, s^{-3/2} 2\pi \int_0^\infty dr_0 r_0^2 \int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta \frac{e^{-r_0/\lambda_0}}{4\pi\lambda_0 r_0^2}\, e^{-\frac{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\vartheta)}{4s}}$$

Die Integration nach ϑ läßt sich hierin elementar durchführen, so daß man erhält:

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{s}\lambda_0}\frac{1}{r} e^{-r^2/4s} \int_0^\infty \frac{dr_0}{r_0} e^{-\frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{r_0^2}{4s}} \left(e^{\frac{rr_0}{2s}} - e^{-\frac{rr_0}{2s}}\right).$$

Die Zurückführung dieses Integrals auf bekannte Funktionen ist im Anhang durchgeführt. Wir teilen hier unmittelbar das Ergebnis mit: Führt man

$$x = \frac{r}{2\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad a = \frac{\sqrt{s}}{\lambda_0} \tag{22}$$

als dimensionslose Parameter ein, so entsteht:

$$\varrho = \frac{A}{s\lambda_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-x^2}}{x} \int_{a-x}^{a+x} dt\, e^{t^2}\left[1 - \Phi(t)\right]. \tag{23}$$

Darin bedeutet $\Phi(t)$ das Gaußsche Fehlerintegral. Unter Benutzung der Funktion

$$F(z) = \int_0^z dt\, e^{t^2}\left[1 - \Phi(t)\right] \tag{24}$$

kann man dafür auch schreiben

$$\varrho = \frac{A}{s\lambda_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-x^2}}{x}\left[F(a+x) - F(a-x)\right]. \tag{25}$$

Man sieht leicht ein, daß diese Formel für $x \gg 1$, $x \gg a$ das geforderte asymptotische Verhalten ergibt. Nach den Formeln des Anhangs wird dann $F(a+x)$ nur logarithmisch anwachsen, während für $x > a$ die Funktion $F(a-x)$ ein negatives Argument besitzt und sich asymptotisch verhält wie

$$F(-z) = -\frac{e^{z^2}}{z}\left(1 + \frac{1}{2z^2} + \cdots\right).$$

Daher wird asymptotisch

$$\varrho = \frac{A}{s\lambda_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-x^2}}{x}\frac{e^{(x-a)^2}}{x-a}\left(1 + \frac{1}{2(x-a)^2} \cdots\right) = \frac{A}{s\lambda_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2} \frac{e^{-2ax}}{x(x-a)}\left(1 + \cdots\right),$$

oder auf die physikalischen Größen umgerechnet

$$\varrho = 2\sqrt{\pi}\frac{A}{\lambda_0} e^{s/\lambda_0^2} \frac{e^{-r/\lambda_0}}{r\left(r - \frac{2s}{\lambda_0}\right)}\left[1 + \frac{s}{\left(r - \frac{2s}{\lambda_0}\right)^2} + \cdots\right]. \tag{26}$$

Wir erhalten also außer der asymptotischen Proportionalität mit $\frac{1}{r^2} e^{-r/\lambda_0}$ auch noch eine bestimmte Aussage über den Normierungsfaktor, die vielleicht eine versuchstechnische Anwendung hinsichtlich der Intensitätsbestimmung von Neutronenquellen bei bekannter Indikatorempfindlichkeit oder, umgekehrt, der Empfindlichkeit bei bekannter Quellstärke zuläßt.

Um $\varrho(r)$ auch in denjenigen Bereichen noch angeben zu können, in denen x nicht $\gg 1$ ist, ist im folgenden die Funktion $F(z)$ teils mit Hilfe der im Anhang wiedergegebenen Reihenentwicklungen, teils durch numerische Integra-

tion nach der Simpson-Regel tabuliert. Außerhalb des in der Tabelle enthaltenen Wertebereichs gelten die asymptotischen Formeln

$$\text{für } z>4: \quad F(z)=F(4)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\ln\frac{z}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{z^2}\right)\cdots\right],$$

$$\text{für } z<-3: \quad F(z)=\frac{e^{z^2}}{z}\left(1+\frac{1}{2z^2}+\frac{3}{4z^4}+\cdots\right).$$

Tabelle I

z	$F(z)$	$-F(-z)$
0	0	0
0,1	0,0947	0,1059
0,2	0,1799	0,2255
0,3	0,2569	0,3615
0,4	0,3271	0,5177
0,5	0,3913	0,6987
0,6	0,4505	0,9105
0,7	0,5051	1,1615
0,8	0,5558	1,4624
0,9	0,6031	1,8279
1,0	0,648	2,278
1,4	0,801	5,70
1,8	0,924	16,84
2,2	1,027	66,1
2,6	1,114	365
3,0	1,190	2915
4,0	1,346	
5,0	1,469	

Die am Beispiel der Punktquelle hier erläuterte Methode läßt sich im Prinzip natürlich auch auf kompliziertere Probleme übertragen. Davon soll aber im Rahmen dieser mehr grundsätzlichen Arbeit abgesehen werden.

5. Berechnung der Funktion $s(E_0, E)$ für Wasser

Um unsere Methode auf den wichtigsten Fall quantitativ anzuwenden, betrachten wir die Neutronenbremsung in Wasser, bei der man den elastischen Stoß an Wasserstoffatomen benutzt. Wir kennen in diesem Fall den Streuquerschnitt σ_H als Funktion der Neutronenenergie E sowohl experimentell als theoretisch recht gut. Er läßt sich quantitativ innerhalb der Fehlergrenzen durch die Formel darstellen

$$\sigma_H=2{,}80\cdot 10^{-24}\left[\frac{1}{E+0{,}2}+\frac{3}{E+4{,}4}\right]\text{cm}^2, \quad (27)$$

wobei die Energie in MeV einzusetzen ist. Eine Formel dieses Typs würde sich in Strenge ergeben, wenn die Wellenlänge des gestreuten Neutrons groß ist im Vergleich zur Reichweite der Kraftwirkung zwischen den beiden Teilchen, vorausgesetzt, daß außer dem ^3S-Grundzustande der Bindungsenergie 2,2 MeV (Deuteron) das System Proton-Neutron noch einen ^1S-Zustand von + 0,1 MeV besitzt. Der Zahlenfaktor sollte dann allerdings etwas kleiner sein (2,15 statt 2,80); der etwas höhere Wert scheint besser zu den experimentellen Ergebnissen zu passen. Wir erhalten damit bei kleinen Energien einen Streuquerschnitt[7]) von etwa $16\cdot 10^{-24}$ cm² und einen starken Abfall des Querschnitts bei einigen 100 keV, dem sich ein langsamerer Abfall im Gebiet einiger MeV anschließt.

In diesem letzteren Energiebereich spielt die Streuung an Sauerstoff schon eine erhebliche Rolle. Man hat dort zwar weder theoretisch noch experimentell ausreichende Kenntnisse, um den Wirkungsquerschnitt mit der gleichen Sicherheit angeben zu können wie für Wasserstoff, doch scheint der Ansatz

$$\sigma_O=\left[1{,}15+\frac{0{,}12}{E+0{,}04}\right]\cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2 \quad (28)$$

der Form nach vernünftig und numerisch in Einklang mit den Messungen[8]), vor allem mit der Tatsache des beträchtlichen Anstiegs des Querschnitts nach kleinen Energien hin.

Die nach den Formeln (27) und (28) berechneten Streuquerschnitte von Sauerstoff σ_O und Wasser $\sigma_H+\frac{1}{2}\sigma_O$ sind in Fig. 1 über einer logarithmischen Energieskala aufgetragen. Aus ihnen wurden die freien Weglängen λ_s für Wasser berechnet, wie sie in Fig. 2 wiedergegeben sind. Es fällt dabei besonders die starke Abhängigkeit der Weglänge von der Energie im Bereich von einigen MeV auf. Man muß hiernach erwarten, daß die Neutronen bis zur Bremsung Wege zurücklegen, welche weitgehend abhängig sind von ihrer Primärenenergie E_0.

7) L. Simons, Phys. Rev. **55**, 792, 1939, hat λ_s in Wasser für Resonanzneutronen von *Ag* und *J* unmittelbar zu 0,91 cm gemessen, während unsere Formel auf 0,84 cm führt. Da die verschiedenen Literaturangaben noch in dieser Größenordnung streuen, ist es wahrscheinlich, daß die hier zugrunde gelegten Zahlenwerte im Laufe der nächsten Jahre noch kleine Änderungen erfahren. Bei höheren Energien seien die Arbeiten erwähnt: Leipunsky, Rosenkewitsch und Timoshuk, Physik. Zeitschr. Sowjetunion **10**, 625, 1936; Booth und Hurst, Proc. Roy. Soc. **161**, 248, 1937; Tuve und Hafstad, Phys. Rev. **50**, 490, 1936; Ladenburg und Kanner, Phys. Rev. **52**, 1255, 1937; Kikuchi und Aoki, Phys. Rev. **55**, 108, 1939; Aoki, ebenda S. 795; Salant, Roberts und Wang, ebenda S. 984.

8) Nähere Angaben in Heisenberg, Kosmische Strahlung, S. 135.

Bei der Berechnung von s nach Gleichung (9) tritt eine charakteristische Schwierigkeit dadurch auf, daß sich s nicht additiv aus den Beiträgen von Wasserstoff und Sauerstoff zusammensetzt. Zur Lösung von Problemen dieser Art, bei denen gleichzeitig zwei Kernarten den Weg der Neutronen beeinflussen, von denen die eine Art sehr schwer ist im Vergleich zu der anderen, kann man in guter Näherung die Annahme einführen, daß nur die leichte Art zur Bremsung beiträgt, während beide Arten Richtungsänderungen hervorrufen und somit in die Diffusionskonstante eingehen. Wir wollen demnach zwei freie Weglängen für Streuung unterscheiden: λ_H, welches mit σ_H berechnet wird und in alle Formeln der Bremstheorie eingeht, und $\lambda_{H,O}$, welches mit $\sigma_H + \frac{1}{2}\sigma_O$ berechnet wird und die Diffusionskonstante bestimmt. Mit dieser Unterscheidung tritt an Stelle von Gleichung (9) der Ausdruck (mit $M = 1$):

$$s = \frac{1}{3}\int_E^{E_0} \lambda_H \lambda_{H,O} \frac{dE}{E}. \qquad (29)$$

Nach dieser Formel wurde s numerisch mit Hilfe der Simpsonschen Regel ausgewertet. Das Ergebnis zeigt Fig. 3 für die untere Integrationsgrenze von $E = 1$ eV. Die Abhängigkeit der Größe s von E ist sehr gering; aus den in der Figur angegebenen Werten erhält man diejenigen für $E = 10$ eV und 100 eV, indem man überall 0,6 und 1,2 von den Funktionswerten abzieht.

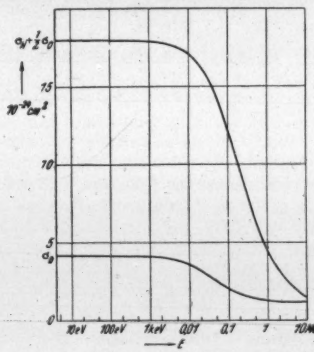

Fig. 1. Streuquerschnitte von Wasser und Sauerstoff.

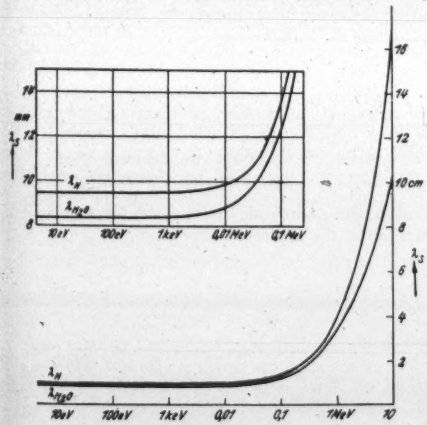

Fig. 2. Freie Weglängen für elastische Stöße in Wasser.

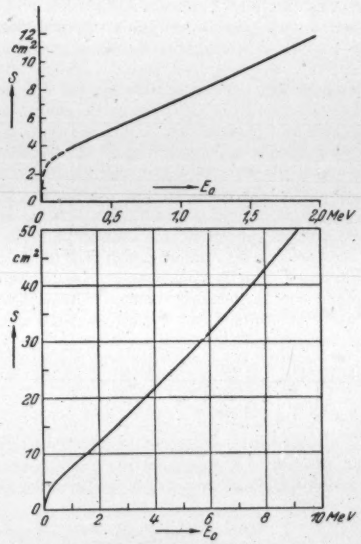

Fig. 3. Das Bremslängenquadrat s in Wasser für die Endenergie von 1 eV.

6. Die Verteilung der thermischen Neutronen

Bei der Bremsung in Wasser erreicht der weitaus überwiegende Teil der Neutronen bekanntlich thermische Energie. Für den Vergleich mit experimentellen Befunden ist daher die Berechnung der Verteilung thermischer Neutronen fast unerläßlich. Eine Methode hierzu wurde

bereits früher[9]) im Anschluß an die Bremstheorie entwickelt und kann hier fast wörtlich übernommen werden. Bezeichnen wir die Dichte der thermischen Neutronen im stationären Zustande mit ϱ_{th}, ihre Diffusionskonstante mit D und ihre Lebensdauer mit τ, so gilt die Differentialgleichung

$$D\Delta\varrho_{th} - \frac{1}{\tau}\varrho_{th} + q(r) = 0 . \qquad (30)$$

Dabei bedeutet $q(r)$ jetzt die in der Zeiteinheit in einem cm³ an der Stelle r entstehende Anzahl thermischer Neutronen. Da sich letztere durchweg durch weitere Verlangsamung von bereits auf etwa 1 eV abgebremsten Neutronen ohne allzu große Ortsverschiebung bilden, muß die Funktion $q(r)$ proportional sein der Dichte ϱ der Neutronen dieser Energie, wie sie für ein unendlich ausgedehntes Medium z. B. durch die Gleichung (25) gegeben ist, wenn man etwa den zu 1 eV gehörigen s-Wert dort einsetzt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen beiden Funktionen, $q = C\varrho$, läßt sich aus der Forderung berechnen, daß die Absolutzahl der sich in der Zeiteinheit im ganzen Raum überhaupt bildenden thermischen Neutronen gleich sein muß der je Zeiteinheit von der Neutronenquelle emittierten Zahl von Primärneutronen, da Absorption in diesen Energiebereichen wenigstens bei Wasser keine Rolle spielt. Es ist also

$$4\pi\int_0^\infty q(r)r^2dr = Q . \qquad (31)$$

Bei Einsetzen von ϱ aus Gleichung (25) entsteht eine komplizierte Integration, die wir uns aber sehr vereinfachen können durch die Bemerkung, daß die freie Weglänge λ_0 der Primärneutronen nur auf die räumliche Verteilung, nicht aber auf die Gesamtzahl von Einfluß ist, so daß wir hier $\lambda_0 = 0$ setzen dürfen, also an Stelle von Gleichung (25) die Verteilungsfunktion (17) benutzen dürfen. Es ergibt sich dann sofort

$$q(r) = \frac{Q}{8\pi^{3/2}A}\varrho(r) , \qquad (32)$$

d. h. also bei Benutzung von Gleichung (25):

$$q(r) = \frac{Q}{16\pi s\lambda_0}\frac{e^{-x^2}}{x}[F(a+x) - F(a-x)] , \qquad (33)$$

worin x und a die in Gleichung (22) erklärte Bedeutung haben.

Wir transformieren unsere Differentialgleichung (30) nun auf die neue dimensionslose Variable

$$z = \frac{r}{l} , \qquad (34)$$

worin

$$l = \sqrt{D\tau} \qquad (35)$$

die sogenannte „Diffusionslänge" thermischer Neutronen bedeutet. Sie ist nicht zu verwechseln mit dem analog gebildeten, in Gleichung (12) eingeführten mittleren Lebensweg. Benutzen wir außerdem die Abkürzung

$$2p = \frac{l}{\sqrt{s}} \qquad (36)$$

für das Verhältnis von Diffusionslänge zu Bremslänge, sowie die Funktion

$$u(z) = z\varrho_{th}(z) \qquad (37)$$

an Stelle der Dichte der thermischen Neutronen, so entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dz^2} - u + \frac{Q\tau}{16\pi s\lambda_0 p}e^{-p^2z^2}[F(a+pz) - F(a-pz)] = 0 . \qquad (38)$$

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich von der l. c. früher behandelten lediglich durch die Form des inhomogenen Gliedes. Das Lösungsverfahren kann von dort daher unmittelbar übernommen werden; allgemein läßt sich die Lösung der Gleichung

$$u'' - u + 2f(z) = 0 \qquad (39)$$

schreiben

$$u = C_1e^z + C_2e^{-z} + e^{-z}\int_0^z dy e^y f(y) - e^z\int_0^z dy e^{-y}f(y) .$$

Die beiden Integrationskonstanten müssen darin so bestimmt werden, daß die Dichte bei $z = 0$ endlich bleibt, d. h. $u(0) = 0$, und daß sie für $z \to \infty$ verschwindet: $u(\infty) = 0$. Die erste Randbedingung führt sofort auf $C_1 + C_2 = 0$, d. h. man kann schreiben

$$u = e^z\left(C - \int_0^z dy e^{-y}f(y)\right) + e^{-z}\left(\int_0^z dy e^y f(y) - C\right).$$

Ohne im einzelnen die Integrale zu berechnen, läßt sich doch sagen, daß das erste von ihnen auch für $z \to \infty$ endlich bleiben muß, während das zweite schwächer unendlich wird, als der Faktor e^{-z} gegen Null geht. Um die zweite Randbedingung zu befriedigen, hat man deshalb

$$C = \int_0^\infty dy e^{-y}f(y)$$

9) C. H. Westcott, Proc. Camb. Phil. Soc. **33**, 122, 1937; S. Flügge, Zeitschr. f. Phys. **111**, 109, 1938.

zu wählen; die gesuchte Lösung ergibt sich dann sofort zu

$$u = e^z \int_z^\infty dy e^{-y} f(y) + e^{-z} \left[\int_0^z dy e^y f(y) - \int_0^\infty dy e^{-y} f(y) \right]. \tag{40}$$

Unsere Aufgabe besteht also lediglich darin, die beiden hierin auftretenden Integrale auszurechnen unter Zugrundelegung der speziellen Funktion

$$f(z) = \frac{Q\tau}{32\pi s \lambda_0 p} e^{-p^2 z^2} [F(a + pz) - F(a - pz)]. \tag{41}$$

7. Durchführung eines Zahlenbeispiels

Die in den Abschnitten 4 und 6 geschilderte Methode läßt sich auf zahlreiche Probleme der Neutronenphysik anwenden. Es würde jedoch weit den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, wollten wir uns mit diesen Anwendungen jetzt ausführlich befassen. Unser Ziel war vielmehr lediglich die Beschreibung der neuen Methode; nur um sie deutlicher zu schildern, wollen wir im folgenden noch ein Beispiel durchführen.

Wir untersuchen die Verteilung der langsamen Neutronen in einem großen Wassergefäß, wenn sich in seiner Mitte eine punktförmige Quelle von Neutronen der einheitlichen Anfangsenergie $E_0 = 5$ MeV befindet[10]). Wir lesen die zugehörige freie Weglänge in Wasser in Fig. 2 ab zu $\lambda_0 = 7{,}4$ cm. Nach dem ersten Stoß haben wir im Mittel die Energie $E_0 = 2{,}5$ MeV; hiermit berechnet sich der Wert von s für die Bremsung von E_0 auf $E = 1$ eV zu $s = 14$ cm², wie man in Fig. 3 abliest. Nun wird $a = \sqrt{s}/\lambda_0 = 0{,}50$.

Wir berechnen zunächst die Verteilung der überthermischen Neutronen von 1 eV. Aus Gleichung (25) ergibt sich hierfür in willkürlicher Normierung

$$\varrho = \frac{e^{-x^2}}{x} [F(a + x) - F(a - x)]$$

mit dem Anfangswert für $x = 0$:

$$\varrho_0 = 2\, e^{a^2} [1 - \Phi(a)].$$

Die Funktion F entnehmen wir aus Tabelle I oder aus der graphischen Darstellung Fig. 4. Das Rechenschema ist für einige Werte von x in der folgenden Tabelle angegeben:

x	$a+x$	$a-x$	e^{-x^2}	$F(a+x)$	$F(a-x)$	ϱx
0,0	0,50	0,50	1	0,391	0,391	0,000
0,35	0,85	0,15	0,885	0,582	0,140	0,392
0,70	1,20	—0,20	0,613	0,730	—0,226	0,586
1,05	1,55	—0,55	0,332	0,851	—0,800	0,549
1,40	1,90	—0,90	0,1409	0,952	—1,828	0,392
1,75	2,25	—1,25	0,0468	1,040	—4,02	0,237
2,10	2,60	—1,60	0,01216	1,12	—9,58	0,130
2,45	2,95	—1,95	0,00248	1,13	—26,9	0,070
2,80	3,30	—2,30	0,00039	1,24	—97,8	0,039

10) Ein komplexes Neutronenspektrum kann man stets als Summe einzelner Neutronenquellen einheitlicher Anfangsenergien behandeln.

Die so berechnete Verteilung wird zweckmäßig noch mit x multipliziert. Die Funktion ϱx^2 besitzt ein Maximum bei $x = 1{,}15$; das entspricht $r = 2\sqrt{s}\,x = 8{,}6$ cm. Demgegenüber hätte die elementare Diffusionsformel Gleichung (17) ein Maximum von ϱr^2 an der Stelle $x = 1$ oder $r = 2\sqrt{s} = 7{,}5$ cm ergeben. Der auf Grund unserer korrigierten Theorie erhaltene Wert von 8,6 cm paßt gut zu den von Amaldi und Fermi zuerst experimentell angegebenen Zahlen für *Ra + Be*-Neutronen, deren Energie sich ja etwa in der Gegend von 5 MeV bewegt.

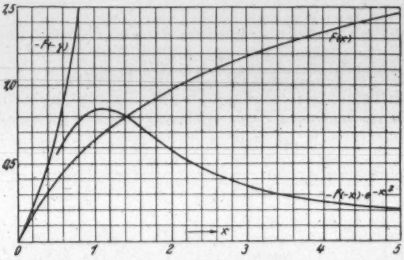

Fig. 4. Verlauf der Funktion F für positive und negative Argumente.

Der Unterschied zwischen der hier berechneten Dichteverteilung der Neutronen von 1 eV und derjenigen, welche sich aus Gleichung (17) ergibt, wird noch deutlicher, wenn man den ganzen Kurvenverlauf betrachtet. In Fig. 5 bedeutet die gestrichelte Linie 2 den Verlauf von ϱr^2 nach Gleichung (17) und die Linie 3 den nach Gleichung (25). Dabei ist die Normierung so gewählt, daß beide Kurven den gleichen Flächeninhalt umschließen, so daß also die Gesamtzahl aller Neutronen von 1 eV in beiden Fällen übereinstimmt. Der Unterschied rührt eben davon her, daß die Linie 2 durch die Bremsdiffusion einer Punktquelle zustande kommt, die Linie 3 dagegen durch die Bremsdiffusion von Neutronen, die über den ganzen Raum verteilt sind, entsprechend der durch die Linie 1 in willkürlicher Normierung dargestellten ϱr^2-Verteilung der Primärneutronen ($\varrho r^2 \sim e^{-r/\lambda_0}$).

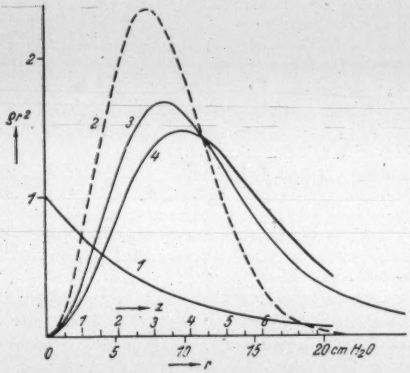

Fig. 5. Neutronenverteilungskurven in Wasser.
Linie 1: Primärneutronen von 5 MeV.
Linie 2: Neutronen von 1 eV aus Punktquelle (Gleichung 17).
Linie 3: Desgleichen nach Gleichung (25).
Linie 4: Thermische Neutronen.

Die Berechnung der Verteilung thermischer Neutronen setzt die Kenntnis der Diffusionslänge l voraus. Mit $l = 2{,}6$ cm in Wasser erhält man $p = \frac{l}{2\sqrt{s}} = 0{,}35$ und damit gemäß Gleichung (41) bei Unterdrückung des Normierungsfaktors

$$f(z) = e^{-(0{,}35\,z)^2}\left[F(0{,}5 + 0{,}35\,z) - F(0{,}5 - 0{,}35\,z)\right].$$

Diese Funktion kann man unmittelbar aus der vorigen Tabelle entnehmen, weil $x = pz = 0{,}35\,z$ ist. Man hat nun die beiden Funktionen $f(y)\,e^{y}$ und $f(y)\,e^{-y}$ zu tabulieren. Die beiden in Gleichung (40) auftretenden Integrale entnimmt man entweder durch Planimetrieren oder berechnet sie nach der Simpsonschen Regel. Auf diese Weise entsteht die folgende Tabelle, die den Verlauf der einzelnen Glieder in Gleichung (40) veranschaulicht. Dabei ist

$$C = \int_0^\infty dy\, e^{-y} f(y) = 0{,}296$$

z	$\int_0^z dy\, e^{y} f(y) = J_1$	$\int_z^\infty dy\, e^{-y} f(y) = J_2$	$(J_1 - C)e^{-z}$	$J_2 e^{z}$	u
0	0,000	0,296	− 0,296	0,296	0,000
1	0,413	0,1850	+ 0,043	0,503	0,546
2	2,87	0,0702	0,348	0,519	0,867
3	10,23	0,0201	0,496	0,404	0,900
4	26,1	0,00475	0,472	0,260	0,732
5	54,2	0,000995	0,363	0,148	0,511
6	97,5	0,000195	0,241	0,079	0,320

Das Ergebnis der Rechnung stellt die Linie 4 in Fig. 5 dar. Man sieht deutlich, daß das Maximum für thermische Neutronen im Vergleich zu den überthermischen nach außen verschoben ist; die Funktion $\varrho_{th}\, r^2$ hat in diesem Falle ihr Maximum bei $r = 10$ cm. Auch dieser Wert paßt sehr gut zu den experimentellen Erfahrungen.

Anhang

Um Gleichung (25) zu gewinnen, berechnen wir zunächst das Integral

$$J = \int_\varepsilon^\infty \frac{d\xi}{\xi}\, e^{-2a\xi - \xi^2 + 2x\xi},$$

wobei ε sehr klein sein soll. Die Ableitung dieses Integrals nach a läßt sich leicht angeben:

$$\frac{dJ}{da} = -2\int_\varepsilon^\infty d\xi\, e^{-2(a-x)\xi - \xi^2} = -\sqrt{\pi}\, e^{(a-x)^2}\left[1 - \Phi(a-x)\right].$$

Hierbei ist $\varepsilon = 0$ gesetzt, weil in der Ableitung von J die Konvergenzschwierigkeiten an der unteren Integrationsgrenze wegfallen. Führt man nun die Hilfsfunktion

$$F(z) = \int_0^z dt\, e^{t^2}\left[1 - \Phi(t)\right]$$

ein, so folgt rückwärts durch Integration

$$J = -\sqrt{\pi} F(a-x) + K(\varepsilon),$$

wobei $K(\varepsilon)$ die Rolle der Integrationskonstanten spielt. Es kann aus dem Spezialfall $a = x$ leicht berechnet werden. Dann hat man einerseits $J = K(\varepsilon)$ und anderseits

$$J = \int_\varepsilon^\infty \frac{d\xi}{\xi}\, e^{-\xi^2} = -\frac{1}{2}\, Ei(-\varepsilon^2) = \ln\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{für } \varepsilon \ll 1).$$

Es ist also $K(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Wir bilden nun

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} e^{-2a\xi-\xi^2} (e^{2x\xi} - e^{-2x\xi}) = \sqrt{\pi}\,[F(a+x) - F(a-x)]\,.$$

Verstehen wir unter a, x, ξ die Größen

$$a = \frac{\sqrt{s}}{\lambda_0}, \quad x = \frac{r}{2\sqrt{s}}, \quad \xi = \frac{r_0}{2\sqrt{s}},$$

so finden wir für die Neutronendichte

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{s}\,\lambda_0} \frac{1}{2\sqrt{s}\,x} e^{-x^2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} e^{-2a\xi-\xi^2} (e^{2x\xi} - e^{-2x\xi}) = \frac{A}{s\lambda_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} [F(a+x) - F(a-x)]\,.$$

Das stimmt mit Gleichung (25) überein.

Die Funktion $F(z)$ läßt sich tabulieren unter Zuhilfenahme folgender Entwicklungen:

$$\text{a)} \quad f_1(z) = \int_0^z dt\, e^{t^2}.$$

Für kleine z ergibt die Potenzreihenentwicklung des Integranden bei $t = 0$:

$$f_1(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,n!} + \cdots$$

Für große z führt die Abspaltung des Faktors e^{z^2} auf die semikonvergente Entwicklung:

$$f_1(z) = \frac{e^{z^2}}{2z}\left[1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \cdots \frac{(2n)!}{n!}(2z)^{-2n} + \cdots\right].$$

$$\text{b)} \quad f_2(z) = \int_0^z dt\, \Phi(t)\, e^{t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{t^2} \int_0^t du e^{-u^2}.$$

Mit $u = t \cdot v$ kann die Reihenfolge der Integrationen vertauscht und die Integration nach t ausgeführt werden:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 dv \frac{e^{z^2(1-v^2)} - 1}{1 - v^2}.$$

Für kleine z folgt hieraus durch Potenzreihenentwicklung des Integranden bei $z = 0$:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[z^2 + \frac{1}{3} z^4 + \frac{4}{45} z^6 + \frac{2}{105} z^8 + \frac{16}{4725} z^{10} + \cdots\right].$$

Substituiert man statt v die neue Variable $w = v \cdot z$, so entsteht bei Entwicklung des Nenners $1 - v^2$ in eine geometrische Reihe

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{z^2}}{z} \int_0^z dw (e^{-w^2} - e^{-z^2}) \sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^{2n}.$$

Daraus erhält man für große z die semikonvergente Entwicklung:

$$f_2(z) = \frac{e^{z^2}}{2z}\left[1 + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-4} + \frac{15}{8} z^{-6} + \cdots + \frac{(2n)!}{n!}(2z)^{-2n} \cdots\right].$$

Von Nutzen ist endlich noch die asymptotische Formel

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\ln \frac{x}{y} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{3}{32}\left(\frac{1}{y^4} - \frac{1}{x^4}\right) + \cdots\right].$$

Dies gilt, wenn sowohl x als $y \gg 1$ sind.

(*Eingegangen 30. August 1943*)

Die Natur der verwaschenen Interferenzen bei polierten Metallen

Von Hans Richter

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung in Stuttgart)

Mit Tafel XXXIV

Bei einem Vergleich der in der Literatur wiedergegebenen Elektronenbeugungsaufnahmen polierter Metalle fällt auf, daß die Streubilder durchweg fast gleiches Aussehen bezüglich der Lage und Intensitätsfolge der Interferenzringe zeigen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich solche Polieraufnahmen grundsätzlich von den Durchstrahlungsaufnahmen amorpher Schichten[1]). Die Gleichheit der Ringlagen bei den Streubildern des Polierprozesses ist wahrscheinlich durch fremde Einflüsse bedingt. Im Laufe eingehender und umfangreicher Untersuchungen an amorphen Schichten und polierten Metallen konnte ein wesentlicher Beitrag zur Erforschung der Natur der beim Polierprozeß auftretenden zwei bis drei verwaschenen Ringe[2]) mit $d_0 \sim 4{,}50$ Å, $d_1 \sim 2{,}30$ Å und $d_2 \sim 1{,}26$ Å, kurz „Pseudoringe" genannt, geliefert werden.

I. Lage der Pseudoringe und der amorphen Metallringe

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Pseudoringe nicht mit den amorphen Metallringen identisch sind. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit (I) sind die d-Werte der Flüssigkeitsperioden für eine ganze Reihe von Elementen durch Aufdampf- und Aufschmelzversuche bestimmt worden. Bei der Reflexion an polierten Metallen sollte man etwa die gleichen d-Werte bzw. infolge Brechung der gespiegelten Strahlung an den geebneten Oberflächen eher etwas größere Werte für die Flüssigkeitsperioden erwarten. Die beim Polieren von Metallen von den verschiedenen Beobachtern[3]) erhaltenen d_1-Werte und Verhältniszahlen für d_2/d_1 sind für die untersuchten Elemente in der folgenden Tabelle zusammengestellt. In der letzten Spalte dieser Tabelle sind die Werte von d_1 bzw. d_2/d_1 für die Elemente wiedergegeben, wie sie die eigenen Elektronenuntersuchungen (I) bei der Durchstrahlung nichtkristalliner Schichten geliefert haben. Diese Zusammenstellung zeigt, daß, abgesehen von wenigen Arbeiten, vorzugsweise die schwer schmelzbaren Metalle untersucht worden sind. Die hierbei von den einzelnen Beobachtern erhaltenen d_1-Werte stimmen zum Teil sehr schlecht miteinander überein, ferner lassen sie keine gesetzmäßige Abhängigkeit vom Atomradius der untersuchten Elemente erkennen. Ein Vergleich dieser d_1-Werte und Verhältniszahlen des Polierprozesses mit denen der Durchstrahlung amorpher Metallschichten zeigt, daß es sich bei den d-Werten des Poliervorganges niemals um die Perioden der amorphen Oberflächenstruktur handeln kann, da die Lage der Interferenzen in beiden Fällen eine andere ist; auch zeichnet sich bei den Polierversuchen an Antimon der charakteristische Verhältniswert: $d_2/d_1 = 0{,}63$ in keiner Weise ab. Weiter geht aus Fig. 48 der Arbeit (I) durch Extrapolation der d_1-Kurve deutlich hervor, daß den Metallen Eisen, Nickel, Kupfer bzw. Aluminium, Silber, Gold im amorphen Zustande als erste Periode etwa der Wert $d_1 = 2{,}10$ Å bzw. $d_1 = 2{,}30$ Å zuzuordnen ist. Die stärksten amorphen Ringe dieser Metalle liegen damit ungefähr bei den gleichen Winkeln, wo wir die Pseudoringe beobachten, zumal im allgemeinen auch für die amorphe Metallphase $d_2/d_1 \sim 0{,}55$ ist. Bei diesen Elementen kann infolge Überlagerung beider Ringsysteme eine eindeutige Unterscheidung zwischen den amorphen Metallringen und den Pseudoringen nicht getroffen werden. Für die Polierversuche sind daher nur die Übergangsmetalle wie Antimon Wismut, Blei, Zinn u. a. geeignet, da bei ihnen ein scharfe Trennung beider Ringsysteme möglich ist.

II. Streubilder der Polierstrukturen

Je nach der Methode des Polierens, der Gegenwart von Fremdatomen und dem Grade der erreichten Politur hat das Elektronenstreubild ein anderes Aussehen. In den Figg. 1—3 sind die besonders häufig auftretenden Streubilder des Polierprozesses wiedergegeben.

1. Das Streubild der Fig. 1 ist charakterisiert durch drei Interferenzringe; dabei ist die innerste Interferenz von anderer Herkunft als die anderen beiden Interferenzen; häufig sind diesen drei Ringen kristalline Fettinterferenzen überlagert. Der innerste Ring[4]) mit $d_0 \sim 4{,}50$ A tritt selten und unregelmäßig auf; er ist hier recht scharf und intensiv. Die beiden anderen Ringe werden fast immer bei Polierprozessen beobachtet; sie sind meistens stark verwaschen. Dieses Streubild erhält man besonders dann, wenn ein Metallblock kurzzeitig auf Leder oder Tuch bei Gegenwart der üblichen Poliermittel poliert wird. Die Rauhigkeit der Oberfläche ist dabei meistens noch recht groß, so daß mitunter die Debye-Ringe des normalen Metallgitters schwach zu erkennen sind.

2. Das Streubild der Fig. 2 zeigt nur die zwei verbreiterten und zusammengehörenden Ringe

1) H. Richter, Physik. Zeitschr. **44**, 406, 1943, im folgenden mit (I) bezeichnet.

2) Wie bei den Flüssigkeitsstrukturen nichtkristalliner Schichten ist auch hier: $d_2/d_1 \sim 0{,}55$.

3) Bezüglich der Literaturangabe für Polierstrukturen siehe Literaturverzeichnis von (I).

4) H. Raether, Zeitschr. f. Phys. **86**, 86, 1933.

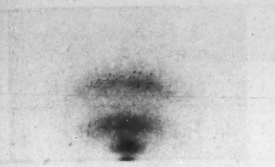

Fig. 1. Eisen poliert.

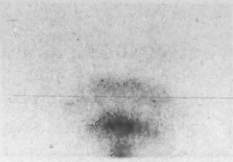

Fig. 2. Wismut poliert.

Fig. 3. Zinn poliert.

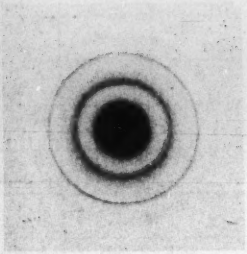

Fig. 4. *Mg*-Folie geätzt.

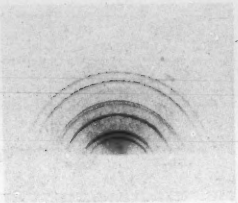

Fig. 5. Gold poliert.

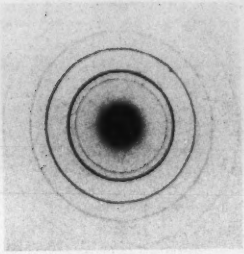

Fig. 6. *Pt*-Folie geglüht bei 700° C.

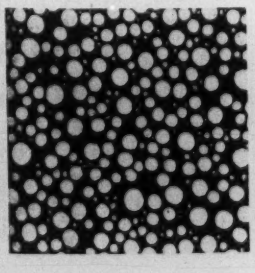

Fig. 7. Gallium flüssig (dünne Schicht). Vergrößerung 38000.

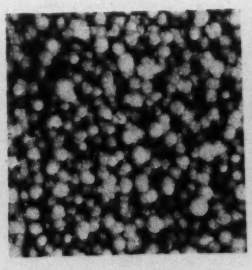

Fig. 8. Gallium flüssig (dicke Schicht). Vergrößerung 38000.

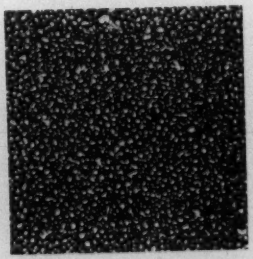

Fig. 9. Gallium fest. Vergrößerung 38000.

1 μ

Perioden der verwaschenen Interferenzen bei polierten Metallen und der Flüssigkeitsinterferenzen nichtkristalliner Schichten

	Reflexionsversuche an polierten Metallen							Durchstrahlung nichtkristalliner Schichten
	Element	French	Raether	Darbyshire und Dixit	Miwa	Dobinski	Plessing	Richter
d_1 in Å	*Ni*		2,24		2,33	1,99	2,22	
d_2/d_1			0,56		0,54	0,58	0,57	
d_1 in Å	*Co*				2,29			
d_2/d_1					0,56			
d_1 in Å	*Fe*	2,48	2,25	—	2,25	1,97	2,32	
d_2/d_1		0,53	0,55		0,57	0,59	0,56	
d_1 in Å	*Cu*	2,25	2,24	2,28	2,28	1,97	2,24	
d_2/d_1		0,56	0,56	0,55	0,57	0,59	0,57	
d_1 in Å	*Cr*	2,36		2,24	2,33			
d_2/d_1		0,55		0,55	0,54			
d_1 in Å	*Zn*			2,40	2,30			
d_2/d_1				0,53	0,56			
d_1 in Å	*Mo*			2,38				
d_2/d_1				0,53				
d_1 in Å	*Al*					2,36		
d_2/d_1						0,53		
d_1 in Å	*Ag*	2,25	2,28	2,27	2,43	2,24	2,23	
d_2/d_1		0,55	0,54	0,54	0,53	0,56	0,56	
d_1 in Å	*Au*	2,34	2,32	2,34		2,23	2,25	
d_2/d_1		0,55	0,56	0,55		0,57	0,57	
d_1 in Å	*Si*			2,56				
d_2/d_1				0,54				
d_1 in Å	*Cd*			2,37	2,39	2,36		
d_2/d_1				0,54	0,54	0,54		
d_1 in Å	*Sn*				2,49	2,24		2,82
d_2/d_1					0,53	0,57		0,53
d_1 in Å	*Sb*			2,25	2,41			3,02
d_2/d_1				0,55	0,54			0,63
d_1 in Å	*Pb*			2,40		2,92		2,90
d_2/d_1				0,55		0,53		0,54
d_1 in Å	*Se*			2,90				3,33
d_2/d_1				0,53				0,54
d_1 in Å	*Te*			2,30				3,23
d_2/d_1				0,54				0,54
d_1 in Å	*Bi*			2,24		2,38		3,01
d_2/d_1				0,56		0,56		0,52

der Fig. 1, die hier weniger stark verwaschen sind. Dieses Streubild beobachtet man vorzugsweise nach längerem Polieren; hier ist die Oberfläche offenbar schon sehr stark eingeebnet. Die weichen Metalle wie Kadmium, Blei, Zinn u. a. liefern beim Polieren recht rasch diese Struktur.

3. Das Streubild der Fig. 3 ist wie die Beugungsbilder amorpher Stoffe durch drei verbreiterte Interferenzringe charakterisiert [vgl. (I), Fig. 41]. Die Schärfe wie auch die Intensitätsfolge der beobachteten Interferenzen spricht für das Vorliegen einer amorphen Phase. Dieses Streubild erhält man vorwiegend beim Polieren von Metallen wie Wismut, Blei, Zinn u. a. auf einer feinst aufgerauhten Glasscheibe; allerdings beobachtet man auch hier bisweilen die Pseudoringe der Fig. 1 bzw. 2.

4. Ein weiteres Streubild zeigt eine nach außen hin gleichmäßig abfallende Schwärzung ohne irgendwelche Anzeichen von Interferenzen; das Auftreten dieses Beugungsbildes erfolgt sehr unregelmäßig. Wie eingehende Untersuchungen ergaben, werden diese Streubilder nicht durch eine Streuung der Elektronen an den amorphen Metallphasen hervorgerufen.

III. Charakteristische Polier- und Glühversuche

Zur Diskussion der betrachteten Beugungsbilder seien einige Versuche erwähnt, die für die Herkunft der beim Polierprozeß beobachteten Interferenzen aufschlußreich sind.

1. Wurde ein Eisenblock poliert, und zwar so, daß er neben den Pseudoringen gerade noch schwach die stärksten Ringe des Eisengitters erkennen ließ, so lieferte er nach mehrstündigem Lagern im Vakuum oder Hochvakuum nur noch die Pseudoringe; ein anschließendes, mehrstündiges Lagern an Luft ergab wieder das Ausgangsdiagramm mit den schwach erkennbaren kristallinen Eisenringen. Diese Versuche wurden mehrmals in verschiedener Richtung mit dem gleichen Befund wiederholt. Ein Abreiben glatter Metallblöcke mit benzolgetränkter Watte lieferte im allgemeinen ebenfalls die verwaschenen Ringe bzw. ließ sie deutlicher hervortreten. Hier sind die verwaschenen Interferenzen durch angelagerte Fremdatome, wahrscheinlich adsorbierte Kohlenwasserstoffe bedingt. Im Zusammenhang mit diesen Versuchen sei auf die diesbezüglichen Untersuchungen der Arbeit (I) an Antimon, Selen und Ölsäure verwiesen. Hier wird an elektrolytisch abgeschiedenem Antimon und an aufgedampftem Selen mitunter genau das gleiche Streubild erhalten wie beim Polieren von Metallen; ein sehr ähnliches Streubild liefern auch die Reflexionsversuche an Ölen. So ist es möglich, sogar an Proben, die niemals poliert wurden, Streubilder wie beim Polierprozeß zu erhalten; andererseits ergaben von vornherein amorphe Selenblöcke nach dem Poliervorgang die Pseudoringe.

2. Wesentlich weiter im Hinblick auf die Natur der Pseudoringe führte eine Variation der Versuchsbedingungen. So wurden unter anderen vorzugsweise Blöcke aus Nickel und Eisen auf Tuch, Leder u. a. mit und ohne Poliermittel im Vakuum, an Luft, unter Argon und unter flüssigen Kohlenwasserstoffen wie Pentan und Benzol poliert. Die dabei erhaltenen d-Werte schwankten sehr stark, während die Verhältniszahlen meistens zu $d_2/d_1 \sim 0{,}55$ gefunden wurden. Für Nickel beispielsweise ergaben sich bei den verschiedenen Polierverfahren als Extremwerte: $d_1 = 2{,}10$ Å $\rightarrow 2{,}70$ Å. Bei Benutzung von Benzol als Schutzschicht wurden die größten Schwankungen von d beobachtet, dagegen waren die d-Werte bei Gegenwart von Luft auffallend konstant; ähnliches gilt für die Reflexionsversuche an Eisen, nur waren hier die Schwankungen von d wesentlich geringer. Die Lage der verwaschenen Interferenzen ist danach sehr stark von der Poliermethode abhängig.

3. Nach Glühversuchen an polierten Metallblöcken bei 200° C im Hochvakuum wurden mitunter noch immer die zwei verwaschenen Interferenzen des Polierprozesses beobachtet. Es stand somit fest, daß die Pseudoringe nicht in jedem Falle durch angelagerte Fremdatome zu erklären sind. Es seien nun noch einige Polier- und Glühversuche an Gold, Nickel, Silber und Platin erwähnt. Polierte Goldblöcke ergaben im allgemeinen die zwei verwaschenen Ringe. Nach einstündigem Erwärmen auf 200° C im Hochvakuum war das Streubild meistens noch unverändert, dagegen wurde nach einstündigem Glühen bei 400° C die kristalline Struktur der Fig. 5 erhalten. Dieses Streubild läßt sich flächenzentriert-kubisch[5]) mit $a_w = 5{,}63$ Å deuten; im Laufe der Untersuchungen wurden 15 diesem Gitter angehörende Linien festgestellt. Das gleiche Streubild mit demselben a_w-Wert wurde bisweilen bei Nickel erhalten. Nickelblöcke ergaben unmittelbar nach dem Polieren meistens die zwei verwaschenen Ringe und nach 20stündigem Lagern im Vakuum des Elektronenrohres bisweilen ebenfalls obige kristalline Struktur von unbekannter Herkunft. Wurde der Nickelblock anschließend im Hochvakuum auf 500° C erhitzt, so waren jetzt die Raumgitterinterferenzen von grobkristallinem Nickel[6]) zu beobachten. Silber- und Platinblöcke ergaben bereits beim Polieren auf Glasscheiben das gleiche Beugungsbild mit demselben a_w-Wert.

Bei dieser fremden kristallinen Struktur des Polierprozesses (Fig. 5) handelt es sich vielleicht um Metalloxydhydrate von unbekannter Zusammensetzung. Wie das Beispiel der Metallhydroxyde zeigt, besitzen die zweifach geladenen Kationen einen Ionenradius von fast gleicher Größe, so daß sich die Gitterkonstanten der verschiedenen Metallhydroxyde bei gleicher Kristallstruktur nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Wahrscheinlich liegen bei der fremden Polierstruktur von Nickel, Silber, Gold und

5) Auf Grund der Intensitätsverhältnisse der beobachteten Interferenzen liegt hier vermutlich keine flächenzentriert-kubische Zelle vor, sondern wahrscheinlich eine hexagonale, doch lassen sich die erhaltenen Linien für eine erste Orientierung recht gut kubisch indizieren.

6) Vgl. E. Plessing, Physik. Zeitschr. **39**, 618, 1938; Zeitschr. f. Phys. **118**, 36, 1939.

Platin Metalloxydhydrate mit ebenfalls zweifach geladenen Kationen vor.

Beim Polieren von Magnesium, Zink und Nickel wurden mitunter die verbreiterten (*hko*)-Interferenzen der Hydroxyde dieser Metalle beobachtet. Fuller[7]) erhält an poliertem Zink genau das gleiche Ringsystem von Zinkhydroxyd [$Zn(OH)_2$]; er ordnet aber das beobachtete Streubild nicht dem $Zn(OH)_2$ zu, sondern spricht stattdessen von Pseudooxyden des metallischen Zinks. Geätzte Walzfolien[8]) lieferten das gleiche Beugungsbild der entsprechenden Metallhydroxyde in Durchstrahlung. So ist in Fig. 4 eine Aufnahme von Magnesiumhydroxyd [$Mg(OH)_2$] wiedergegeben, wie sie an einer geätzten Magnesiumfolie erhalten wurde. Die genaue Prüfung ergab, daß hier nicht Raumgitterinterferenzen der hexagonalen Prismenflächen (*hko*) von $Mg(OH)_2$ vorliegen, sondern Flächengitterinterferenzen[9]) von regellos orientierten hexagonalen Basisflächen.

Ein Glühen von geätzten Gold- und Platinfolien in bestem Hochvakuum bei 500° C oder 700° C führte bisweilen zu ähnlichen kristallinen Strukturen von unbekannter Herkunft, obwohl die Folien vor dem Glühprozeß das Beugungsdiagramm der betreffenden Metalle lieferten. So ergaben z. B. Platinfolien nach kurzem Glühen bei 500° C ebenfalls die obige, fremde Struktur mit $a_w = 5{,}63$ Å (Fig. 5), nach Glühprozessen bei 700° C wurde das gleiche kristalline Streubild, aber mit einer kleineren Gitterkonstanten: $a_w = 4{,}22$ Å erhalten (Fig. 6). Ein Vergleich der Figg. 5 und 6 zeigt die gleiche Ringfolge wie auch Intensitätsverhältnisse der beiden Streubilder[10]). Bei Polierprozessen, wo lokal erhebliche Temperatursteigerungen stattfinden, werden also gleiche bzw. ähnliche Strukturen beobachtet.

4. Abschließend betrachten wir einige Reflexionsversuche an unterkühltem Gallium, also an einer wirklichen Flüssigkeit. Dünn auf schwach aufgerauhte Metallblöcke aufgedampfte Galliumschichten ergaben stets das normale Beugungsdiagramm von flüssigem Gallium [vgl. (I), Fig. 4]. Mit wachsender Schichtdicke nahm die Intensität der Galliuminterferenzen immer mehr ab, während die allgemeine Untergrundschwärzung stärker wurde, bis schließlich nur noch eine mit dem Streuwinkel gleichmäßig abfallende Schwärzung zu beobachten war. Eine Brechung der Strahlung konnte hierbei nicht festgestellt werden.

Wie elektronenmikroskopische Aufnahmen von dünnen Galliumschichten (Fig. 7) zeigen, bildet Gallium beim Verdampfen keine einheitlich zusammenhängende Schicht, sondern einzelne kleine Tröpfchen[11]) von einer mittleren Größe $D \sim 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ cm. Zwischen diesen einzelnen Galliumkügelchen befinden sich hier weitere, etwa um eine Zehnerpotenz kleinere Kügelchen. Diese Galliumtröpfchen können vom Elektronenstrahl ohne wesentliche Absorption durchsetzt werden. Mit zunehmender Dicke der aufgedampften Schicht vereinigen sie sich nur selten zu größeren Kugeln, sondern bilden meistens einzelne voneinander scharf abgegrenzte und übereinander gelagerte Kügelchen (Fig. 8). Diese Galliumkügelchen, die hier etwa von gleicher mittlerer Größe sind wie bei dünnen Aufdampfschichten, werden offenbar durch eine äußere Schutzschicht (angelagerte Fremdatome oder Galliumoxyde) an der Vereinigung zu größeren Kugeln verhindert. Solche Galliumschichten lieferten in Reflexion das Beugungsdiagramm von flüssigem Gallium mit sehr starker Untergrundschwärzung. Noch dickere Aufdampfschichten ($D \sim 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ cm) zeigten bei streifend einfallender Strahlung nur eine allgemeine diffuse Schwärzung, wahrscheinlich als Folge der Viel- und Mehrfachstreuung; oft waren hierbei elektrische Aufladungen zu beobachten, die jedoch bei Eintritt der Kristallisation sofort verschwanden. Das Vorhandensein elektrischer Aufladungen spricht sehr für die Existenz von kleinen, noch isoliert voneinander gelagerten Galliumtröpfchen in diesen dicken Schichten.

Im Gegensatz zur flüssigen Galliumschicht schließen sich beim Erstarren die einzelnen Kügelchen zu einer zusammenhängenden Schicht von kristallinen Gallium (Fig. 9) zusammen. Auf Grund der Ergebnisse an dick aufgedampften flüssigen Galliumschichten ist nicht zu erwarten, daß ein Reflexionsversuch mittels Elektronenstrahlen an einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche, z. B. an Quecksilber bzw. Gallium, wie es Papsdorf[12]) versucht hat, zu den Flüssigkeitsinterferenzen führt; auch Papsdorf beobachtete in einem solchen Fall nur eine nach außen hin gleichmäßig abfallende Streuintensität ohne die geringste Andeutung eines Schwärzungsmaximums.

7) M. L. Fuller, Metals Technol. **5**, Nr. 6, 1938.

8) Geätzte Walzfolien von *Pt*, *Au*, *Ag*, *Cu*, *Ni*, *Fe*, *Zn* und *Cd* ergaben mitunter das gleiche Streubild von $Me(OH)_x$; hiervon soll später die Rede sein.

9) M. v. Laue, Zeitschr. f. Kristallogr. **82**, 127, 1932.

10) In Fig. 6 ist die Zahl der Beugungsringe geringer als in Fig. 5, offenbar als Folge gesetzmäßiger Orientierung der Kristallite.

11) Aufdampfschichten von amorphem *As* liefern etwa das gleiche elektronenoptische Bild wie flüssiges *Ga*. Im Falle der Kristallisation tritt auch hier die Bildung einer zusammenhängenden Schicht ein. In gemeinsamer Arbeit mit Fräulein Dipl.-Phys. S. Geiling wird demnächst über *As* und *Te* ausführlicher berichtet.

12) W. Papsdorf, Ann. d. Phys. **28**, 562, 1937.

Die hier diskutierten Versuche zeigen in aller Deutlichkeit, daß uns die Elektronenbeugungsbilder der Reflexion nur in den seltensten Fällen Aufschluß über die wahre Struktur der äußersten Metalloberflächenschicht geben; besonders bei sehr ebenen Oberflächen wird der Charakter des Streubildes sehr stark durch fremde Einflüsse bestimmt [vgl. (I)].

IV. Herkunft der Pseudoringe

Die eben besprochenen Versuche und die vorangegangenen Betrachtungen zeigen, daß die zwei verwaschenen Ringe des Polierprozesses ($d_1 \sim 2{,}30$ Å und $d_2 \sim 1{,}26$ Å) niemals mit den amorphen Metallinterferenzen identisch sind. Das Auftreten dieser Ringe ist unter Umständen einer Streuung der Elektronen an den auf der geebneten Oberfläche angelagerten Kohlenwasserstoffen zuzuschreiben; hier liegt demnach reine Gasstreuung vor. Vermutlich sind die großen Schwankungen der d-Werte bei den Polierversuchen auf eine verschiedene chemische Konstitution adsorbierter Kohlenwasserstoffe zurückzuführen; wahrscheinlich sind auch Hydroxylgruppen bei der Anlagerung solcher Kohlenwasserstoffketten an metallischen Oberflächen weitgehend beteiligt.

Nicht immer können die Pseudoringe durch eine bloße Anlagerung von Fremdatomen erklärt werden, wie die Glühversuche an polierten Metallblöcken zeigen. In solchen Fällen ist nach Kirchner[13]), Thomson[14]), Germer[15]) und Burwell[16]) die Verwaschenheit der beobachteten Interferenzen auf eine Brechung der gespiegelten Strahlung an der durch Polieren geglätteten Oberfläche zurückzuführen; dabei erfahren die Beugungsringe eine vom Brechungsindex stark abhängige Verschiebung nach kleinen Streuwinkeln, die sehr empfindlich ist gegen eine geringe Änderung der Orientierung der reflektierenden Oberflächenbereiche gegenüber dem Primärstrahl. Hinzu kommt noch eine Verbreiterung der Interferenzringe infolge der geringen Eindringtiefe des Primärstrahles.

Eine solche Begründung steht mit dem Experiment nicht im Einklang. Da der Brechungseffekt den Streuwinkel verkleinert, entspricht der exakten Reflexionsstellung ein Maximum des Streuwinkels. Ein Schwanken der Kristallorientierung um die Normalstellung muß daher zu einer einseitigen Verbreiterung[17]) des Interferenzmaximums führen; dies wird aber bei den Polierversuchen nicht beobachtet. Die zwei verwaschenen Interferenzen des Poliervorganges sind im Falle ihrer Glühbeständigkeit sehr wahrscheinlich Metalloxydhydraten mit nichtkristalliner Struktur zuzuordnen. Hier ließe sich die Konstanz der Lage der zwei verwaschenen Ringe durch die fast gleiche Größe der zweifach geladenen Kationen von Metalloxydhydraten deuten; ihre starke Verwaschenheit dürfte eher durch eine Überlagerung der amorphen Ringe dieser Hydraten von verschiedener chemischer Konstitution oder durch Einbau von Fremdatomen bedingt sein als durch den Einfluß der Brechung oder der Dämpfung der Elektronenstrahlen. Für eine solche Deutung sprechen besonders die Polier- bzw. Lagerungs- und Glühversuche an Silber, Platin bzw. Nickel und Gold, die von den zwei zunächst verwaschenen Interferenzen des Polierprozesses (Fig. 1 und 2) zu den scharfen kristallinen Ringen der Fig. 5 führten.

Es bleibt nun noch die Herkunft des innersten Ringes der Fig. 1 mit $d_0 \sim 4{,}50$ Å diskutieren. Sein Auftreten wird vorwiegend dann beobachtet, wenn die polierte Oberfläche noch nicht den höchsten Grad der Politur erreicht hat; hier handelt es sich sehr wahrscheinlich um die Durchstrahlung einer sehr dünnen, flüssigen Fett- oder Ölschicht. Flüssige Fettsäuren und Öle liefern einen sehr intensiven innersten Flüssigkeitsring von etwa derselben Lage, ein zweiter und dritter Ring sind unvergleichbar schwächer [vgl. (I), Fig. 1]. Es läßt sich somit das unregelmäßige Auftreten des innersten Ringes durch das Vorhandensein oder Fehlen der stärksten Interferenz von flüssigen Kohlenwasserstoffen erklären. Bei den drei Pseudoringen des Polierprozesses handelt es sich demnach um eine Überlagerung von Flüssigkeits- und Gasinterferenzen, wobei unter Flüssigkeitsinterferenzen solche von wirklichen Flüssigkeiten zu verstehen sind und solche von festen Stoffen mit flüssigkeitsähnlicher Atomanordnung.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die drei verwaschenen Ringe des Polierprozesses, kurz Pseudoringe genannt, nicht mit den Interferenzen amorpher Metalle identisch sind. Die Pseudoringe sind gegebenenfalls durch eine Überlagerung von Flüssigkeits- und Gasinterferenzen zu erklären.

13) F. Kirchner, Ergebn. d. techn. Röntgenkunde **4**, 163, 1933.

14) G. P. Thomson, Phil. Mag. **18**, 640, 1934; Trans. Far. Soc. **31**, 1116, 1933.

15) L. H. Germer, Phys. Rev. **48**, 724, 1933 und **44**, 1012, 1933.

16) J. T. Burwell, Journ. chem. Phys. **6**, 749, 1938.

17) In Fig. 4 ist die einseitige Verbreiterung des ersten Interferenzringes, allerdings nach größeren Winkeln und als Folge regelloser Orientierung von zweidimensionalen Gitterbereichen, deutlich zu erkennen; eine ähnliche Verbreiterung sollte auch die Brechung der Elektronenstrahlen beim Beugungsvorgang an polierten Metallen mit sich bringen.

(*Eingegangen 23. August 1943*)

BERICHTE

Die Kernzertrümmerungen durch die kosmische Strahlung[1])

Von Erich Bagge

Mit Tafel XXXV und XXXVI

In den letzten Jahren haben wir gelernt, die Erscheinungen der kosmischen Strahlung nach gewissen Komponenten einzuteilen, die sie auslösen. So unterscheiden wir eine harte, d. h. durchdringende Komponente, deren Wirkungen auf das Auftreten der Mesonen zurückgeht, dann eine weiche, d. h. stark absorbierbare Komponente, die von den Elektronen und Lichtquanten der Höhenstrahlung gebildet wird, und schließlich die Komponente der schweren Teilchen, der Neutronen und Protonen. Die letzte dieser drei Komponenten steht in engem Zusammenhang mit einer Erscheinung, die erst im Jahre 1937 entdeckt und seitdem viel untersucht wurde, nämlich die Kernzertrümmerung durch die kosmische Strahlung.

Im heutigen Vortrag wollen wir nun diesen Prozeß im Hinblick auf seine kernphysikalischen Besonderheiten besprechen und außerdem die Beziehungen dieser Erscheinungen zu den verschiedenen Komponenten der kosmischen Strahlung diskutieren. Vom Standpunkt des Kernphysikers aus gesehen sind diese Zertrümmerungen insofern von besonderem Interesse, als bei ihnen Energien bis zu mehreren hundert Millionen Volt umgesetzt werden und man damit Vorgänge untersuchen kann, die mit unseren bisherigen laboratoriumsmäßigen Hilfsmitteln auf anderem Wege nicht erreichbar sind. Das hat auch zur Folge, daß bei diesen Prozessen Erscheinungen, z. B. die Ausdehnung der Atomkerne bei hohen Anregungsenergien und dann die Kernverdampfungsvorgänge auftreten, die bis dahin in der Kernphysik nicht bekannt waren. Darüber hinaus aber haben die Kernzertrümmerungen auch Bedeutung gewonnen für die Bestimmung der Reichweite der Kernkräfte, und wir können behaupten, daß sich gerade aus der Diskussion der Zertrümmerungsprozesse eine sehr scharfe Methode zur Ermittlung dieser Reichweite ergeben hat.

Schließlich aber haben die Untersuchungen der Zertrümmerungen den Aufbau unseres Gesamtbildes von der kosmischen Strahlung nicht unwesentlich beeinflußt. Wir wissen nicht nur, daß die weiche Komponente der kosmischen Strahlung diese Prozesse auslöst, wir können aus den verschiedenen Beobachtungen auch schließen, daß der größte Teil der Protonen und Neutronen, wahrscheinlich sogar alle Kernteilchen, die wir in der unteren Atmosphäre beobachten, die Folgeprodukte der Kernzertrümmerungen darstellen. Die Hypothese, daß diese Partikel unmittelbar aus dem Weltraum zu uns kommen, ist, wie wir noch sehen werden, zumindest für die Teilchen in der unteren Atmosphäre also entbehrlich. Inwieweit unsere Anschauungen über die Primärnatur der kosmischen Strahlung noch beeinflußt werden können, ist zwar im Augenblick noch nicht abzusehen, so viel steht aber jetzt schon fest, daß sicher ein ganz erheblicher Teil der in großen Höhen beobachteten Protonen nichtprimären Ursprungs ist, sondern als zwangsläufige Folge der Kernzertrümmerungen angesehen werden muß. Leider sind die Messungen noch nicht so weit fortgeschritten, daß man auch in diesen Gebieten die Verhältnisse ebensogut überblicken kann wie in der unteren Atmosphäre.

Die Energieverteilung der Kernsplitter

Die ersten Beobachtungen von Kernzertrümmerungen erfolgten durch Kunze (K 2) in der Wilsonkammer. Es handelte sich jedoch nur um Einzelaufnahmen, aus denen kaum mehr zu entnehmen war als die Tatsache, daß es solche Prozesse geben kann und daß sie unter hohem Energieumsatz ablaufen. Bei einer Häufigkeit dieser Kernzertrümmerungen in Meereshöhe von $0{,}6_1$ bis $1{,}2 \cdot 10^{-4}/\mathrm{cm}^3$ Luft $\cdot\, d$ sind diese Prozesse ja auch viel zu selten, als daß man sie in einer Wilsonkammer von etwa $^1/_{10}$ Sekunden Empfindlichkeitsdauer ohne besondere Maßnahmen beobachten kann. Es würde dies ja bedeuten, daß man mit einer Kammer von 10 Liter Inhalt in Meereshöhe im Mittel etwa 80000 Aufnahmen durchführen muß, bis man einen Prozeß dieser Art findet, der im Gasraum selbst ausgelöst wird.

Die Verhältnisse wurden nun grundlegend geändert, als es im Jahre 1937 Blau und Wambacher (B 4) gelang, die Kernzertrümmerungen in photographischen Platten aufzufinden (Fig. 1), die längere Zeit der Einwirkung der kosmischen Strahlung ausgesetzt waren. Es war damit eine Methode entdeckt, die es erlaubte, je nach den vorhandenen Intensitäten die Zertrümmerungen in der Gelatineschicht der photographischen Platte über längere Zeit hinweg, unter Umständen monatelang, gleichsam kontinuierlich zu registrieren. Darüber hinaus aber bot dieses Verfahren den Vorteil, aus der Reichweite, bzw. der Korndichte der Bahnen, direkt die Energie

[1]) Vortrag, gehalten am 21. Mai in Berlin vor der Deutschen Physikalischen Gesellschaft Berlin.

der Kernsplitter zu bestimmen, wenn man annahm, daß es sich bei den Zertrümmerungsprodukten um Protonen handelte. Dabei wurde durch die Untersuchungen von Wambacher (W 1) über die Korndichte der Bahnen, besonders gegen das Ende der Reichweite hin, nahegelegt, daß die Kernteilchen in der überwiegenden Zahl Protonen sein müssen. Andererseits ist allerdings aus Aufnahmen von Schopper (S 2) und Filippov (F 1) zu entnehmen, daß gelegentlich auch größere Kernstücke emittiert werden.

Die photographische Methode erlaubte nun, das statistische Material über die Zertrümmerungen in kurzer Zeit sehr zu vergrößern und so wurde auch bald nach der Entdeckung der Kernzertrümmerungen eine Häufigkeitsverteilung der Energien der Zertrümmerungsprotonen von Wambacher (W 1) angegeben, die bereits mehrere hundert Sterne umfaßte.

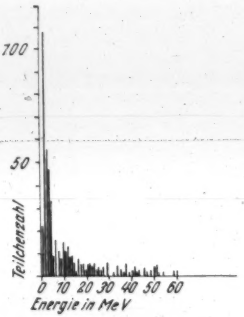

Fig. 2. Energieverteilung der Sternteilchen (W 1).

Dieses Energiespektrum ist in Fig. 2 wiedergegeben. Die Teilchen kleiner Energien zwischen 1—2 MeV sind danach besonders zahlreich, und von da ab zeigt sich ein praktisch monotoner Abfall der Häufigkeit bis zu Werten von etwa 60 MeV hin.

Diese Energieverteilung enthält nun zwei auffallende Besonderheiten, deren Besprechung jetzt erfolgen soll. Zunächst einmal hätte man erwartet, daß Zertrümmerungsprotonen unterhalb von etwa 2,6 MeV überhaupt nicht auftreten, denn beim leichtesten der in der Gelatineschicht der Photoplatten vorkommenden, zusammengesetzten Atomkerne, nämlich C^{12}, beträgt die Höhe der Coulombschen Potentialschwelle 2,6 MeV. Für die übrigen Kerne N und O liegt sie nur wenig höher, für Br^{80}_{35} und $Ag^{107,\,109}_{47}$ hingegen lauten die entsprechenden Werte 7,8 MeV bzw. 10 MeV. Die Protonen sollten also diese Energiewerte mindestens besitzen, selbst wenn sie den Kern mit verschwindender Energie verlassen. Man hätte darum zunächst einfach erwartet, daß die Wambachersche Häufigkeitsverteilung im Gebiete zwischen 2—3 MeV scharf nach Null heruntergeht. Tatsächlich aber wird beobachtet, daß sie in diesem Bereich bis herab zu 1 MeV nur noch stärker ansteigt.

Von Ortner (O 1) wurde nun versucht, die Statistik insofern zu korrigieren, als unter allen untersuchten Sternen diejenigen ausgewählt wurden (es waren insgesamt 14 Sterne), deren Protonenzahl mindestens neun beträgt. Man war so sicher, daß diese Zertrümmerungsprozesse an Br- oder Ag-Kernen erfolgt sein mußten, da der schwerste unter den drei leichten Kernen, die in der photographischen Emulsion vorkommen (O, N, C), nämlich der Kern O, überhaupt nur acht Protonen besitzt.

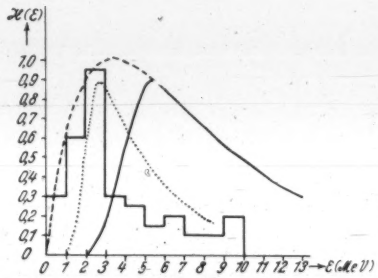

Fig. 3. Energieverteilung der Teilchen aus Sternen mit mehr als 8 Protonen (O 1). ---- Theoretisch für Neutronen; —— theoretisch für Protonen; ..... theoretisch für Protonen aus größeren Kernsplittern.

Aber auch hier bot sich das gleiche Bild. Wie man der Treppenkurve der Fig. 3 entnimmt, zeigt sich zwar ein Effekt in der erwarteten Richtung. Die Kurve besitzt ein deutlich ausgeprägtes Maximum, aber quantitativ paßt dessen Lage nicht zu unserer Erwartung. Es liegt ja im Bereich zwischen 2—3 MeV, während es sich mit Rücksicht auf die hohe Coulombsche Potentialschwelle bei Ag und Br in der Gegend von 8 MeV hätte befinden sollen.

Die zweite auffallende Besonderheit im Energiespektrum der Zertrümmerungsprotonen ist der langsame Abfall der Kurve im Bereiche großer Energien zwischen etwa 20 und 60 MeV. Wir wissen heute, daß bei „Kernverdampfungen" die Teilchen nur Energien von der Größenordnung der Kerntemperatur erhalten können, und diese liegt auch bei den höchsten Anregungsenergien der Kerne von einigen hundert MeV in der Gegend von $kT \sim 5$ MeV. Selbst wenn also durch den Stoß eines Höhenstrahlungsteilchens

der Kern auf etwa 300 MeV angeregt sein sollte, würde man erwarten, daß die „abgedampften" Protonen und Neutronen in der weit überwiegenden Zahl mit Energien unterhalb 20 MeV den Kern verlassen. Der energienreiche Ast der Wambacherschen Verteilungskurve muß also irgendwie mit dem direkten Stoß in Zusammenhang stehen, und wir werden zeigen, daß er uns eine Möglichkeit bietet, die Reichweite der Kernkräfte sehr scharf zu bestimmen.

Kernausdehnung und Kernverdampfung

Es erhebt sich nunmehr die Frage, wie die im letzten Abschnitt besprochenen besonderen Merkmale des Energiespektrums der Zertrümmerungsprotonen zu erklären seien. Zunächst einmal liegt es nahe, zu vermuten, daß die Emission energiearmer Protonen bei den Zertrümmerungsprozessen mit einer Ausdehnung der Kerne infolge der bei ihrer Auslösung übertragenen Anregungsenergie zusammenhängen wird. Eine solche Vergrößerung des Kernvolumens wirkt sich in der Tat so aus, als ob die Coulombsche Potentialschwelle erniedrigt wird, denn es werden in diesem Falle ja Teile der Kernmaterie in Raumgebiete gebracht, deren Abstand vom Kernmittelpunkt größer ist als der ursprüngliche Kernradius. In diesen Bereichen aber hat sich das elektrostatische Coulomb-Potential bereits merklich gesenkt, und damit können abgespaltene Protonen auch mit geringerer Energie den Kern verlassen. Wie eine Ausdehnung des Atomkernes bei einer Anregung zustande kommen kann, macht man sich am besten klar an Hand des viel diskutierten Tröpfchenmodells. Dieses Modell hat sich zur Erklärung des Verlaufs der Astonschen Kurve der Packungsanteile sehr gut bewährt. Wenn jetzt so ein Kerntröpfchen durch einen Stoßprozeß angeregt wird, so wird es irgendwelche Schwingungen ausführen, deren Eigenfrequenzen und Amplituden man bei gegebenen Eigenschaften der Kernmaterie und für die jeweiligen Anregungsenergien berechnen kann (B 1).

Für das mittlere Amplitudenquadrat der Oberflächenwellen erhält man so:

$$\overline{\Delta r^2} = \frac{\hbar}{2\sqrt{\pi \varrho G R}} \sum_{l=2,3\ldots} \frac{l\,(2l+1)}{\sqrt{l\,(l-1)\,(l+2)}\left(e^{\frac{\hbar\omega_l}{kT}}-1\right)}. \tag{1}$$

Dabei ist ϱ die Dichte der Kernmaterie, R der Kernradius, G die gesamte Oberflächenenergie des betrachteten Kerns: $G = 13{,}25\,A^{2/3}$ MeV, A das Atomgewicht und kT die „Kerntemperatur", die sich in MeV ausgedrückt aus der Anregungsenergie Q (auch in MeV) ergibt nach der Formel:

$$kT \approx 3{,}8\sqrt{\frac{Q}{A}}. \tag{2}$$

ω_l schließlich ist die zu l-ten Eigenschwingung gehörige Eigenfrequenz. Sie erhält man aus der Gleichung:

$$\omega_l^2 = \frac{Gl\,(l-1)\,(l+2)}{4\pi\varrho R^5}. \tag{3}$$

Die Größe $\overline{\Delta r^2}$ ist nun ein Maß für die Ausdehnung des Atomkerns. Man kann mit ihrer Hilfe einen mittleren Dichteverlauf der Kernmaterie ermitteln:

$$\varrho_T(r) = \frac{\varrho}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{r-R}{\sqrt{2\,\overline{\Delta r^2}}}\right)\right], \tag{4}$$

wobei Φ die Abkürzung für das Gaußsche Fehlerintegral darstellt. Daraus folgt unmittelbar, daß sich für höhere Anregungsenergien der Coulombsche Potentialwall wesentlich erniedrigt, denn sobald man in Gebiete kommt, in denen die Dichte ϱ_T merklich von Null verschieden ist, wird sich die in ihrer Größe annähernd bekannte Kernbindungsenergie bemerkbar machen, deren Größe die der Coulombkräfte weit überwiegt. Die Berechnung des zugehörigen mittleren Potentialverlaufs ergibt die in Fig. 4 dargestellten Verhältnisse.

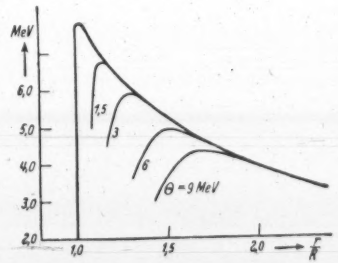

Fig. 4. Die Höhe des Gamowberges beim $^{80}_{35}Br$-Kern für die Anregungsenergien: $Q = 12{,}5$; 50; 200; 450 MeV. Entsprechende Temperaturwerte: $\Theta = 1{,}5$; 3; 6; 9 MeV.

Man entnimmt daraus, daß schon bei einer Anregung eines Kerns von nur 12,5 MeV die Höhe des Potentialwalles um etwa 1 MeV gesenkt wird. Bei höheren Anregungsenergien tritt diese Abflachung des Gamowberges zwar immer deutlicher in Erscheinung, nur zeigt sich, daß sie

mit wachsender Energie nicht so rasch fortschreitet wie zu Anfang, und erst bei einer Anregungsenergie von etwa 450 MeV ist eine Senkung auf etwa die halbe Höhe erfolgt.

Man kann sich die Frage vorlegen, welche Gestalt das Energiespektrum der emittierten Protonen unter Berücksichtigung der Potentialbergsenkung besitzt. Dazu wird man zunächst ausgehen von der entsprechenden Verteilungsfunktion für Neutronen. Für diese wurde von Weißkopf (W 3) gezeigt, daß sie die Form $Ee^{-\frac{E}{kT}}$ haben müßte, wenn man den Kern während des ganzen Verdampfungsvorganges auf der Temperatur T hielte. Tatsächlich aber kühlt er sich ja im Laufe dieses Prozesses ständig ab, und dieser Effekt muß natürlich auch berücksichtigt werden. Man kann sich überlegen, daß die korrigierte Verteilungsfunktion etwa lautet (B 3):

$$f(E)dE = \frac{E}{E+E_0} e^{-\frac{E}{kT}} dE . \qquad (5)$$

Dabei ist E_0 die Ablösearbeit eines Neutrons von der Kernoberfläche, deren Wert für Kerne im Bereiche um $A = 100$ etwa 8 MeV beträgt, T bedeutet jetzt die Ausgangstemperatur zu Beginn des Verdampfungsvorgangs. Der neu hinzugetretene Nenner $E + E_0$ bewirkt im wesentlichen eine Verschiebung des Häufigkeitsmaximums nach kleineren Energien hin.

Die Verteilungsfunktion für die Protonen erhält man daraus in gröbster Annäherung, wenn man die Funktion (5) mit der zur Temperatur gehörigen quantenmechanischen Durchlässigkeit des Potentialwalles multipliziert.

Das Ergebnis ist in Fig. 3 angegeben. Gestrichelt eingezeichnet ist die Funktion (5) für die Neutronen, ausgezogen die entsprechende für die Protonen, und jedenfalls dürfte man für so hohe Anregungsenergien eine Verteilungsfunktion mit einem Maximum im Bereiche zwischen 5—7 MeV erwarten. Zur Erklärung der Ortnerschen Kurve reicht also der durch die Oberflächenschwingungen bewirkte Abflachungseffekt allein nicht aus.

Von Ortner (O 1) wurde nun darauf hingewiesen, daß man in Analogie zu ähnlichen Vorgängen bei der Uranspaltung damit rechnen müsse, daß bei diesem Prozeß auch größere Kernbruchstücke mit abgedampft werden, die anschließend dann selber noch weiter verdampfen können, und es wurde oben auch auf diesbezügliche Andeutungen bei den Aufnahmen von Schopper und Filippov eingegangen. Diese Kernsplitter müssen aus Stabilitätsgründen ungefähr gleich viele Protonen und Neutronen enthalten. Entsprechend ihrer höheren Ladung gewinnen sie im Coulombfeld jetzt zwar eine höhere Energie, pro Kernbaustein, gerechnet ist deren Betrag aber nur halb so groß wie für ein einzelnes Proton, da die ungeladenen Neutronen von den Teilchen der anderen Sorte mitgeschleppt werden müssen und damit gezwungen sind, ihre im Coulombfeld aufgenommene Energie mit diesen zu teilen. Im Mittel werden in diesem Falle die Protonen nur die Hälfte der Energie besitzen, die sie erhielten, wenn sie allein abdampften.

Es ist natürlich kaum möglich, etwa das unter Berücksichtigung dieser Vorstellung zu erwartende Energiespektrum zu berechnen, da weder bekannt ist, in welcher Häufigkeit die größeren Kernbruchstücke abspalten, noch bis zu welchem Grade der Selbstauflösung ihre nachträgliche Verdampfung fortschreitet. Man kann nur verstehen, daß dieser Effekt zusammen mit der durch die Oberflächenschwingungen bewirkten Erniedrigung des Gamowberges annähernd den richtigen Mittelwert der Protonenenergie liefern wird. In diesem Sinne ist auch die in Fig. 3 eingezeichnete punktierte Kurve zu verstehen, die sich einfach durch Halbierung der Protonenenergie für die ausgezogene ergibt. Sie paßt jedenfalls ungefähr zu der von Ortner angegebenen experimentellen Verteilung.

Der primäre Stoßvorgang. Reichsweitenbestimmung der Kernkräfte

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich im wesentlichen auf den energiearmen Teil des beobachteten Protonenspektrums, der energiereiche Ast der Wambacherschen Kurve hingegen wurde hiervon nicht berührt. Es wurde vielmehr schon angedeutet, daß dieser Abschnitt der Verteilungskurve in direktem Zusammenhang mit dem Primärstoß gebracht werden muß.

Dafür spricht neben dem schon oben behandelten energetischen Argument noch eine experimentelle Beobachtung, die wir kurz besprechen wollen. Wenn man nämlich die räumliche Richtungsverteilung der emittierten Protonen untersucht, so zeigt sich, daß die Teilchen mit einer Energie > 20 MeV sich bei jedem Einzelprozeß im wesentlichen in einem Halbraum befinden, während die Richtungen der energieärmeren unterhalb 20 MeV annähernd kugelsymmetrisch um das Sternzentrum verteilt sind. Dieser Sachverhalt findet seine einfachste Erklärung durch die Annahme, daß das den Prozeß auslösende Teilchen bzw. Lichtquant zunächst ein oder mehrere Protonen und Neutronen sehr stark anstößt. Diese durchsetzen den Rest der vor ihnen liegenden Kernmaterie und stoßen dabei weitere Neutronen an. Soweit ihre Energie nun ausreicht, werden diese zusammen mit den ersten den Kern

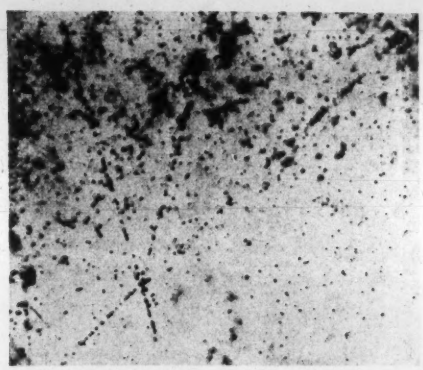

Fig. 1. Kernzertrümmerung in der Gelatineschicht einer Photoplatte.
Aufnahme von H. Wambacher.

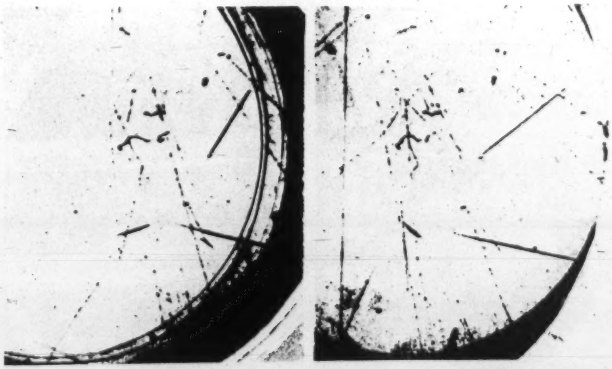

Fig. 10. Kernzertrümmerung in der Glasplatte der Wilsonkammer und Elektronenschauer.
Aufnahme von Brode, MacPherson und Starr (B 6).

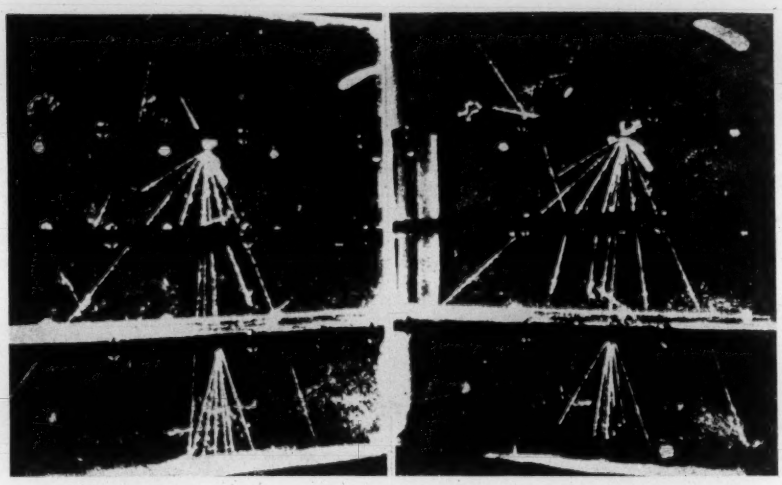

Fig. 11. Kernzertrümmerung in einer *Pb*-Platte mit gleichzeitiger Entstehung von Elektronen und Mesonen beim Zertrümmerungsprozeß. Aufnahme von Fussell (F 3).

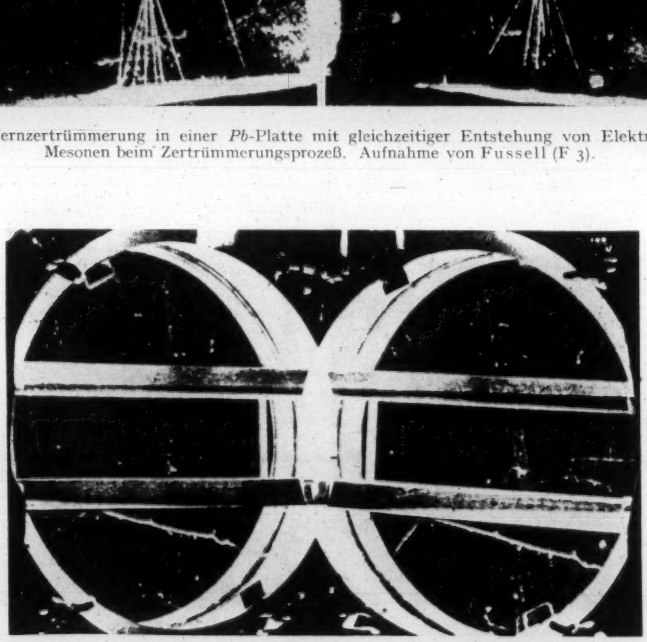

Fig. 12. Kernzertrümmerung in einer *Pb*-Platte. Gleichzeitig ist ein Elektronenschauer sichtbar. Aufnahme von Cocconi (C 1).

sofort verlassen, und selbstverständlich wird sich bei diesen energiereichen Teilchen irgendwie die Primärstoßrichtung noch in ihrer räumlichen Geschwindigkeitsverteilung ausprägen.

Anders ist das bei den energiearmen Partikeln. Sie werden von einem sich nur langsam bewegenden großen Kern abgeschleudert. Ein solcher Verdampfungsvorgang aber wird im wesentlichen kugelsymmetrisch ablaufen. Man sollte nur erwarten, daß sich den Geschwindigkeiten der Teilchen eine kleine Vorwärtskomponente überlagert, die von der Bewegung des getroffenen Kerns herrührt. Ein Effekt in dieser Richtung ist nach Stetter und Wambacher (S 4) in der Tat auch vorhanden.

Die Häufigkeitsverteilung der energiereichen Teilchen läßt sich nun, wie von Heisenberg gezeigt wurde (H 1, H 2), angenähert berechnen, auch wenn man den eigentlichen Primärvorgang nicht genau kennt. Es ist ja sicher so, daß ein oder mehrere Neutronen bzw. Protonen bei diesem Prozeß angestoßen werden und diese dann bei ihrem weiteren Durchgang durch den Kern noch andere Kernbausteine in Bewegung setzen, und man kann infolge der hohen Dichte der Kernmaterie weiter annehmen, daß mehr Partikel sekundär getroffen als ursprünglich ausgelöst werden. Die Energieverteilung der Teilchen ist also im wesentlichen durch den Stoß Nukleon gegen Nukleon bestimmt.

Für den letzteren läßt sich aber die entsprechende Verteilungsfunktion sofort berechnen, wenn man die Kernkräfte kennt. Nun sind diese zwar noch nicht so gut ermittelt, wie man sie für die Berechnung der obigen Häufigkeitsverteilung benötigte, man kann aber umgekehrt diese Experimente dazu benutzen, die Kräfte genauer zu untersuchen.

Wenn man für die Kräfte zwischen den Nukleonen einen Ansatz wählt, wie er sich in der Theorie der leichten Kerne gut bewährt hat:

$$V_{ik} = V_0 e^{-\frac{r_{ik}^2}{a^2}} \mathfrak{P}_{ik}. \qquad (6)$$

($\mathfrak{P}_{ik}$ ist ein Austauschoperator, den wir für unsere Betrachtung einfach gleich Eins setzen können), dann erhält man für die Energieverteilung folgende Funktion (H 1 und B 2):

$$\left.\begin{aligned} f(p)\,dp &= C V_0^2 \frac{p}{v^2} \frac{e^{-C_1 a^2 (p-1)}}{(p-1)^3}\,dp \\ p &= \frac{m v_1}{\sqrt{2m \cdot 21{,}5\ \mathrm{MeV}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(m = Masse des Nukleons, v = Geschwindigkeit des stoßenden Nukleons, v_1 = Geschwindigkeit des getroffenen Nukleons, C und C_1 = zwei Konstanten, die sich aus universellen Naturkonstanten zusammensetzen.)

Die Funktion gilt dabei nur für Energien oberhalb von etwa 20 MeV. Unterhalb dieses Bereiches besitzt sie eine kompliziertere Gestalt. Es wird hier aber auf deren Wiedergabe verzichtet. Jedenfalls aber kann man der Verteilung (7) entnehmen, daß die Reichweite a quadratisch in die Exponenten der e-Funktion eingeht, und das bedeutet, daß sich kleine Änderungen von a exponentiell stark auf die Gestalt der Funktion auswirken müssen.

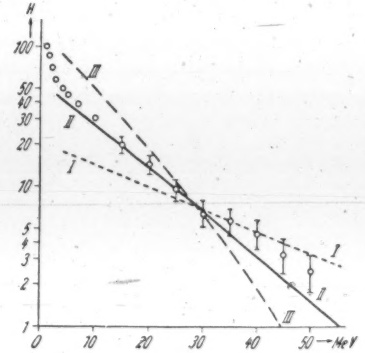

Fig. 5. Häufigkeit der emittierten Protonen als Funktion der Energie. ○ Meßwert I statistischer Fehler. *I*, *II*, *III* theoretische Häufigkeitsverteilung für $a = 0{,}6\,r$, $a = 0{,}8\,r$, $a = 1{,}0\,r$ (logarithmischer Maßstab).

In Fig. 5 sind nun in logarithmischer Darstellung drei Kurven eingezeichnet, die aus Gleichung (7) und der nicht angegebenen, auch für kleinere Energien unterhalb von 30 MeV gültigen Formel für die drei Reichweiten

$$a = \left\{\begin{matrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 1{,}0 \end{matrix}\right\} \frac{e^2}{mc^2}$$

berechnet wurden, und man sieht, daß die Kurve für $r = 0{,}8\,\frac{e^2}{mc^2}$ schon ganz gut zur experimentellen Verteilung paßt. Noch günstiger liegen, wie von Ortner gezeigt wurde, die Verhältnisse für $a = 0{,}7\,\frac{e^2}{mc^2}$. Es gelingt dann praktisch die Experimente innerhalb der Fehlergrenzen im Gebiet von 10—60 MeV wiederzugeben. Unterhalb dieses Bereiches ist natürlich eine Übereinstimmung nicht mehr möglich, da dort dann die Verdampfungsprozesse wichtig werden und das Bild verändern. Man sieht also, daß es auf diesem

einfachen Wege gelungen ist, die Reichweite der Kernkräfte sehr scharf zu $a = 0{,}7\,\frac{e^2}{mc^2}$ zu bestimmen, während die amerikanischen Messungen über die Streuung von Protonen an Protonen etwa um die gleiche Zeit, als diese Bestimmungen erfolgten, $0{,}5\,\frac{e^2}{mc^2} < a < 2\,\frac{e^2}{mc^2}$ ergaben. Die letzten uns bekannten amerikanischen Messungen führten dann später allerdings auch zum Wert $a = 0{,}7\,\frac{e^2}{mc^2}$.

Die auslösende Strahlung

Die Frage nach der Natur der Strahlung, die die Kernzertrümmerungen auslöst, ist am besten zu beantworten durch Absorptionsversuche. Man kann entweder so verfahren, daß man die Platten in verschiedenen Höhen der Atmosphäre exponiert und damit gleichsam die über den Platten liegende Luftmenge als Absorber benutzt oder aber indem man andere Absorbermaterialien, z. B. Blei, in verschiedener Dicke über die Schichten bringt. Beide Methoden sind angewandt worden und führen unabhängig voneinander zum gleichen Ergebnis.

Zunächst einmal sind in Fig. 6 die Messungen über die Häufigkeiten der Kernzertrümmerungen von Stetter und Wambacher (S 4) angegeben. Man entnimmt ihnen, daß im Höhenintervall von 200 bis 3450 ü. d. M. die Intensitäten um einen Faktor 30—60 zunehmen. Es ist dies ein

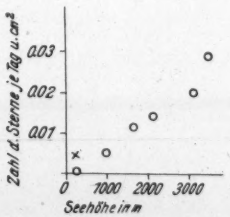

Fig. 6. Häufigkeit der Kernzertrümmerungen als Funktion der Seehöhe nach Stetter und Wambacher (S 4).

Intensitätsanstieg, wie er nur noch bei der weichen Komponente der kosmischen Strahlung, also bei den Lichtquanten und Elektronen, beobachtet wird. Dies ist in Fig. 7 näher erläutert. In ihr sind die Messungen von Stetter und Wambacher nochmals eingetragen, und außerdem ist eine Kurve für den Intensitätsanstieg der weichen Komponente eingezeichnet, wie sie aus Theorie und Experiment zu entnehmen ist. Man sieht sofort, daß die Intensitäten für beide Erscheinungsgebiete praktisch denselben Anstieg haben. Zum Vergleich hierzu sei bemerkt, daß die Gesamtintensität der kosmischen Strahlung, wie man sie etwa in einer gewöhnlichen Ionisationskammer mißt, nur um einen Faktor 3—4 im gleichen Höhenintervall zunimmt.

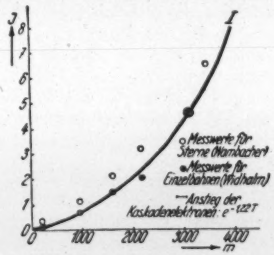

Fig. 7. Sterne und Protoneneinfachbahnen.

In der Fig. 7 sind nun außerdem noch Meßpunkte eingezeichnet, wie sie für die Häufigkeiten der Protoneneinzelbahnen durch Widhalm (W 2) bestimmt wurden. Er hat nach derselben Methode wie Stetter und Wambacher durch Auszählung von Einfachspuren in photographischen Platten diese Messungen durchgeführt, und auch hier zeigt sich ein Intensitätsanstieg mit nahezu demselben Verlauf wie bei

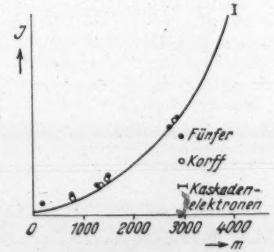

Fig. 8. Neutronen.

den Zertrümmerungsprozessen und der weichen Komponente. Dasselbe gilt auch für die Neutronen (Fig. 8), deren Häufigkeiten von Fünfer (F 2) und im Anschluß daran von Korff (K 1) mit Bohrzählrohren ermittelt wurden.

Die Intensitäten der vier Erscheinungsgebiete: der Kernzertrümmerungen, der Protonen, der Neutronen und der weichen Komponente, zeigen also einheitlich etwa denselben Verlauf mit der Höhe in der Atmosphäre, und

es liegt daher sehr nahe, hier einen genetischen Zusammenhang zwischen ihnen zu vermuten.

Es hat sich nachweisen lassen, daß die beobachteten Häufigkeiten der Neutronen und Protonen aus denen der Kernzertrümmerungen innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen zwangsläufig folgen (B 3). Weiter folgt aus den bekannten Eigenschaften der Neutronen bis zur Energie von etwa 60 MeV sofort, daß diese sich von ihrem Entstehungsort bis zu ihrer völligen Abbremsung bzw. bis zu ihrem Verschwinden nur um höchstens einige hundert Meter entfernen.

Der gleichartige Intensitätsverlauf der Zertrümmerungsprozesse und der Neutronen ist damit schon erklärt. Man braucht jetzt nur noch anzunehmen, daß die Kernzertrümmerungen durch die Elektronen und Lichtquanten der weichen Komponente ausgelöst werden, um die obigen Verhältnisse zu verstehen.

Nun hat sich durch Absorptionsmessungen mit *Pb*-Absorber, die von Heitler (H 3) u. a. ausgeführt wurden, eine unmittelbare Bestätigung dafür gegeben, daß in der Tat die Lichtquanten oder Elektronen für die Auslösung der Kernzertrümmerungen verantwortlich sind.

Bekanntlich erfahren ja die Teilchen der weichen Komponente durch Paarbildungs- und Ausstrahlungsprozesse eine Vermehrung ihrer Häufigkeit, wenn man nur kleine Schichtdicken der Absorber wählt. So ist aus den Messungen der Übergangseffekte von Steinke (S 3) und Schindler (S 1) und den Koinzidenzversuchen von Rossi (R 2) bekannt, daß die Intensität der weichen Komponente hinter etwa 1—2 cm *Pb*-Absorber zunächst ansteigt, um dann erst hinter größeren Absorbermengen abzufallen.

Wenn nun die weiche Komponente wirklich die Kernzertrümmerungen auslöst, so sollte man auch hier hinter dünnen Bleischichten erst einen Anstieg und dann einen Abfall erwarten, und in der Tat fand Heitler dieses Ergebnis (Fig. 9). Es sind in diesem Falle zwar nicht die Zertrümmerungsprozesse selbst, sondern nur die Protonenspuren ausgezählt worden. Nach den obigen Bemerkungen über den inneren Zusammenhang beider Erscheinungen muß dann aber etwas Ähnliches auch für die Kernzertrümmerungen gelten.

Es gibt schließlich noch einen weiteren Gesichtspunkt, der dafür spricht, daß die Elektronen oder Lichtquanten diese Prozesse bewirken. Man hat fast in allen Fällen, in denen es zufällig gelang, in Wilsonkammeraufnahmen solche Kernzertrümmerungen zu photographieren und bei denen die Nebelkammer empfindlich genug war, um auch Elektronen zu zeigen, größere Elektronenschauer mitaufgenommen. Die drei Aufnahmen 10—12 von Brode, MacPherson und Starr (B 6), von Fussell (F 3) und von Cocconi (C 1) sind Beispiele dafür. Die Aufnahme von Fussell ist noch insofern interessant, als bei diesem Prozeß auch die Entstehung von Mesonen mitbeobachtet wurde.

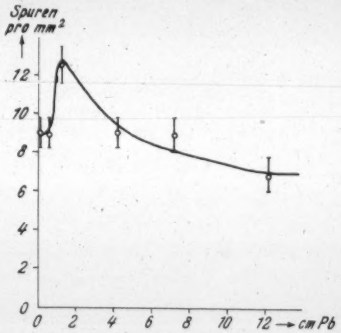

Fig. 9. Häufigkeit der Protonenbahnen hinter *Pb*-Absorber (H 3).

Bei der außerordentlichen Seltenheit sowohl der Kernzertrümmerungen als auch der Elektronenschauer wäre es aber beliebig unwahrscheinlich, daß man etwa zufällig beide Erscheinungen gleichzeitig in einer Aufnahme zusammenfindet.

Wir können heute also ziemlich sicher sagen, daß die Auslösung der Kernzertrümmerungen durch die weiche Komponente der kosmischen Strahlung erfolgt. Ob es nun allerdings die Elektronen oder ob es die Lichtquanten sind, die hauptsächlich für die Prozesse verantwortlich sind, ist den Messungen nicht zu entnehmen. Immerhin wissen wir seit der Entdeckung des Kernphotoeffektes durch Bothe und Gentner (B 5), daß bereits Lichtquanten von nur einigen MeV jedenfalls in der Lage sind, Kernprozesse zu bewirken. Erst recht wird man erwarten dürfen, daß die viel energiereicheren Protonen der Höhenstrahlung solche Prozesse veranlassen können. Es gibt aber auch bis heute keine Argumente, die etwa dagegen sprechen könnten, daß die Elektronen beteiligt sind, nur ist bisher erst ein Fall bekannt, in dem von Kernprozessen durch Elektronen berichtet wird.

Literaturverzeichnis

B 1) E. Bagge, Ann. d. Phys. **33**, 389, 1938.
B 2) E. Bagge, Ann. d. Phys. **35**, 118, 1939.
B 3) E. Bagge, Ann. d. Phys. **39**, 512, 1941.
B 4) M. Blau und H. Wambacher, Nature **140**, 585, 1937.
B 5) M. Bothe und W. Gentner, Zeitschr. f. Phys. **106**, 236, 1937.

B 6) R. B. Brode, MacPherson und M. A. Starr, Phys. Rev. **50**, 581, 1936.
C 1) G. Cocconi, Phys. Rev. **60**, 533, 1941.
F 1) A. Filippov, A. Idanoff und I. Gurevich, Journ. of Phys. UdSSR. **1**, 51, 1938.
F 2) E. Fünfer, Zeitschr. f. Phys. **111**, 351, 1939.
F 3) L. Fussell, Aufnahmen aus H. Euler und W. Heisenberg, Ergebn. d. ex. Naturwiss. **17**, 50, 1938.
H 1) W. Heisenberg, Ber. Sächs. Akad. math.-phys. Kl. **89**, 369, 1937.
H 2) W. Heisenberg, Verh. d. Dtsch. Physik. Gesellschaft (III) **19**, 1, 1938.
H 3) W. Heitler, C. F. Powell und H. Heitler, Nature **146**, 65, 1940.
K 1) S. A. Korff, Rev. mod. Phys. **11**, 218, 1939.
K 2) P. Kunze, Zeitschr. f. Phys. **83**, 1, 1933.
O 1) G. Ortner, Sitzungsber. d. Akad. Wien **149**, 259, 1940.
R 1) B. Rossi, Physik. Zeitschr. **33**, 304, 1932.
R 2) B. Rossi, Zeitschr. f. Phys. **72**, 625, 1931.
S 1) H. Schindler, Zeitschr. f. Phys. **72**, 625, 1931.
S 2) E. M. Schopper und E. Schopper, Physik. Zeitschr. **40**, 22, 1939.
S 3) E. Steinke, Physik. Zeitschr. **31**, 1019, 1930 (Fig. 5 und 6).
S 4) G. Stetter und H. Wambacher, Physik. Zeitschr. **40**, 702, 1939.
W 1) H. Wambacher, Sitzungsber. d. Akad. Wien **149**, 157, 1940.
W 2) A. Widhalm, Zeitschr. f. Phys. **115**, 481, 1940.
W 3) V. Weißkopf, Phys. Rev. **52**, 295, 1037.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik.

(*Eingegangen 1943*)

Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\ 40^{min}$

Der Wert f der ausgestrahlten Normalfrequenz hat betragen:

$f_1 = 1000 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\ 40^{min}$—$10^h\ 46^{min}$ und

$f_2 = 440 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\ 46^{min}$—$10^h\ 49^{min}$.

1943	δ	1943	δ
Okt. 1	— 5	Okt. 16	— 14
2	— 20	17	—
3	—	18	— 9
4	— 17	19	— 11
5	— 19	20	— 16
6	— 20	21	— 16
7	— 18	22	— 18
8	— 25	23	— 18
9	— 23	24	—
10	—	25	— 25
11	— 20	26	— 22
12	— 19	27	— 27
13	— 13	28	— 24
14	— 12	29	— 10
15	— 12	30	— 19
		31	—

Berlin-Charlottenburg, den 5. November 1943.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt,
Abteilung II.

Im Auftrage:
A. Scheibe, U. Adelsberger

NACHRICHTEN

Dozenturen: An der Universität München Dr. Rudolf Hüttel für Chemie, an der Deutschen Karls-Universität Prag Dr. Gerhard Gentzen für Mathematik, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Friedrich Windmaisser für anorganische Chemie, an der Universität Greifswald Dr. Wilhelm Bartholomeyczyk.

Ernannt: Der Dozent für Physik an der Universität Bonn Dr. Wolfgang Riezler zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der Dozent für Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Graz Dr. Arno Reitz zum außerplanmäßigen Professor ebenda, der Dozent an der Technischen Hochschule München Dr. Friedrich Kneule zum Konservator am Institut für chemische Technologie ebenda, der außerplanmäßige Professor an der Universität Berlin Dr. Erich Thilo zum ordentlichen Professor für anorganische Chemie an der Universität Graz, Studienrat Dr. Werner Kliefoth zum Honorarprofessor mit Lehrauftrag für Schulphysik an der Universität Breslau, der Dozent für allgemeine Mechanik an der Technischen Hochschule Wien Dr. Friedrich Löchting zum außerplanmäßigen Professor an der Universität daselbst, der Dozent für pharmazeutische Chemie Dr. Hans Tojahn zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der Dozent für organische Chemie an der Universität Marburg Dr. Gerhard Hesse zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der Dozent für reine und angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Günther Schulz zum außerplanmäßigen Professor daselbst.

Vom Lehramt zurück: Der ordentliche Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin Dr. Max v. Laue.

Gestorben: Der emeritierte ordentliche Professor der anorganischen Chemie an der Universität Breslau Dr. Heinrich Biltz, der Geschäftsführer des Verbandes Deutscher Elektrotechniker in Berlin Dipl.-Ing. Werner Eugen Viefhaus, der frühere Dozent für Mathematik, insbesondere höhere Spezialgebiete der Geometrie Oberstudiendirektor Dr. Johannes Daniel, der ordentliche Professor für Kraftfahrzeuge und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Georg Back (durch Kriegsunfall).

Verantwortlicher Schriftleiter: i. V. Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin, — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Schwägrichenstr. 8. — Druck: A. Heine GmbH., Gräfenhainichen. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 4. — Printed in Germany.

Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., ANN ARBOR, MICHIGAN, U.S.A.